H2T17R.mw, Polynomin juurien sensitiivisyys

Muunnelma Wilkinsonin polynomista

$p := product((x - i), i = 1..8)$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8) \quad \textbf{(1.1)}$$

$pe := expand(p)$

$$x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 \quad \textbf{(1.2)}$$

$fsolve(pe = 0)$

$$1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8. \quad \textbf{(1.3)}$$

Muutetaan x^7:n kerrointa hiukan:

$q := pe - 0.001 \cdot x^7$

$$x^8 - 36.001x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 \quad \textbf{(1.4)}$$

\> $fsolve(q = 0)$

$$0.9999998016, 2.000177934, 2.991135148, 4.162530826, 4.574836092, 8.272602779 \quad \textbf{(1.5)}$$

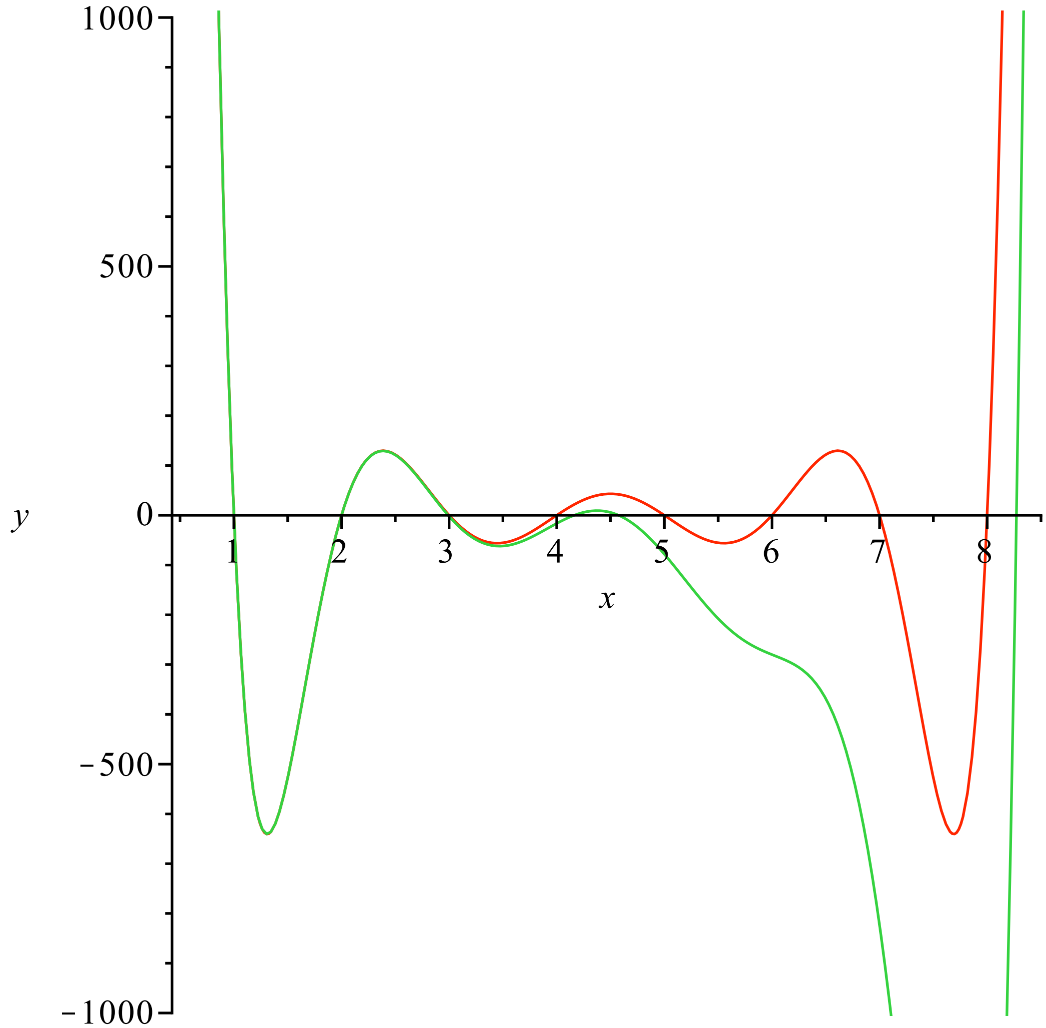
Vain 6 reaalijuurta.

$fsolve(pe = 0, x, complex)$

$$0.999999801587622, 2.00017793443153, 2.99113514750497, 4.16253082638455, 4.57483609179912, 6.49985870966112 - 0.729270601478962\,I, 6.49985870966112 + 0.729270601478962\,I, 8.27260277897126 \quad \textbf{(1.6)}$$

Juuret x=6 ja x=7 hajosivat reilusti kompleksitason puolelle.

$plot([pe, q], x = 0.5..8.5, y = -1000..1000)$



On luonnollista, että x^7 : *n* kertoimen muttaminen vaikuttaa eniten kuvaajaan tällä alueella (koska sen kerroin on 36-kertainen x^8 : *n* kertoimeen verrattuna.
Miten voitais analysoida kvantitatiivisesti?

p

$$(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-5)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-8) \tag{1.7}$$

pe

$$x^8 - 36\,x^7 + 546\,x^6 - 4536\,x^5 + 22449\,x^4 - 67284\,x^3 + 118124\,x^2 - 109584\,x + 40320 \tag{1.8}$$

Tarkoittakoon P polynomia pe, jossa -36:n paikalla on α . Tutkitaan funktiota
$x(\alpha) =$ *kerrrointa* α *vastaava nollakohta*.
yhtalo $:= P(x(\alpha), \alpha) = 0$

$$P(x(\alpha), \alpha) = 0 \tag{1.9}$$

diff (*yhtalo*, alpha)

$$\mathrm{D}_1(P)(x(\alpha), \alpha)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,x(\alpha)\right) + \mathrm{D}_2(P)(x(\alpha), \alpha) = 0 \tag{1.10}$$

$dxdal := solve\left(\%, \frac{d}{d\alpha}\, x(\alpha)\right)$

$$-\frac{D_2(P)(x(\alpha), \alpha)}{D_1(P)(x(\alpha), \alpha)} \quad \textbf{(1.11)}$$

$pal := expand\left(pe + (36 + \alpha) \cdot x^7\right)$

$$x^8 + \alpha\, x^7 + 546\, x^6 - 4536\, x^5 + 22449\, x^4 - 67284\, x^3 + 118124\, x^2 - 109584\, x + 40320 \quad \textbf{(1.12)}$$

$oso := diff(pal, \alpha)$

$$x^7 \quad \textbf{(1.13)}$$

$nimi := diff(pal, x)$

$$8\, x^7 + 7\, \alpha\, x^6 + 3276\, x^5 - 22680\, x^4 + 89796\, x^3 - 201852\, x^2 + 236248\, x - 109584 \quad \textbf{(1.14)}$$

$virhekerroin := -subs\left(x = 7, \alpha = -36, \frac{oso}{nimi}\right)$

$$\frac{823543}{720} \quad \textbf{(1.15)}$$

$k := evalf(\%)$

$$1143.809722 \quad \textbf{(1.16)}$$

Kertoimen α pieni muutos tässä luokkaa 10^{-3}

$k \cdot 10^{-3}$

$$1.143809722 \quad \textbf{(1.17)}$$

Tämä on oikea suuruusluokka ongelmajuurien (x=6,x=7) virheille.

Oikea Wilkinsonin polynomi

$p := product((x - i), i = 1 ..20)$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)(x-15)(x-16)(x-17)(x-18)(x-19)(x-20) \quad \textbf{(2.1)}$$

$pe := sort(expand(p))$

$$x^{20} - 210\, x^{19} + 20615\, x^{18} - 1256850\, x^{17} + 53327946\, x^{16} - 1672280820\, x^{15} + 40171771630\, x^{14} - 756111184500\, x^{13} + 11310276995381\, x^{12} - 135585182899530\, x^{11} + 1307535010540395\, x^{10} - 10142299865511450\, x^9 + 63030812099294896\, x^8 - 311333643161390640\, x^7 + 1206647803780373360\, x^6 - 3599979517947607200\, x^5 + 8037811822645051776\, x^4 - 12870931245150988800\, x^3 + 13803759753640704000\, x^2 \quad \textbf{(2.2)}$$

$$-8752948036761600000\,x+2432902008176640000$$

$fsolve(pe=0,x)$

$$1.,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,9.,10.,11.,12.,13.,14.,15.,16.,17.,18.,19.,20. \tag{2.3}$$

Muutetaan hyvin vähän kerrointa -210. Ja sitä rataa.

Kts. Forsythe-Malcolm-Moler: Computer Methods for Mathematical Computations, ss. 18-19, Prentice Hall 1977