mplBasic, Mapleperusteet

Luvussa esiintyy Maple-ohjelman perusharjoitteluun sopivia tehtäviä.

---

mplBas000

Teknillinen korkeakoulu Alestalo
Matematiikka

Peruskurssien Maple-käskyjä

Tämä tiivistelmä sisältää tärkeimmät Maple-käskyt version 17 mukaan. (Muutettu linalg-tyyppiset LinearAlgebra-tyyppisiksi (Apiola) 10.3.14)

Yleistä:

- Valitse ponnahdusikkunasta "Start with Blank Worksheet".
- Käsky suoritetaan painamalla Return. Käskyn lopussa voi olla kaksoispiste tai ei mitään. Kaksoispisteeseen päättyvän käskyn tulosta ei näytetä. Samalla rivillä voi olla useita käskyjä, jotka täytyy erottaa toisistaan välimerkillä : tai ; Pitkä käsky kannattaa jakaa useille riveille painamalla Shift + Return.
- Kaikista käskyistä saa lisätietoja kirjoittamalla `?käskynnimi` ja painamalla Return. Erityisesti kannattaa katsoa esimerkkejä.
- Edellisen käskyn tulokseen voi viitata symbolilla %, toiseksi edelliseen symbolilla %%. Aikaisempien käskyjen tuloksiin voi viitata niiden numeroiden perusteella: Valitse **Insert** → **Label** tai Ctrl + l.
- Vakioille voidaan antaa arvoja esim. muodossa `alpha:= 1.5;` Huomaa, että ohjelma ymmärtää vain desimaalipisteen.
- Tavalliset laskutoimitukset kirjoitetaan samaan tapaan kuin paperilla, x^2 muodossa `x^2`. Nuolinäppäimellä → pääsee pois yläindeksistä.
- Myös pidemmille lausekkeille tai funktioille voidaan antaa uusia nimiä: esim. `p:= 2*x^2-3*x` määrittelee `p`:n lausekkeena, mutta `poly:= x -> 2*x^2-3*x` määrittelee `poly`:n funktiona. Funktiosta saadaan helposti lauseke, mutta vastakkainen suunta on hankalampi: Maplen kannalta `p` ja `poly(x)` ovat sama asia, mutta funktiota `poly` voi käyttää paljon monipuolisemmin.
- Muuttujan arvon voi poistaa kirjoittamalla esim. `alpha:= 'alpha';` Kaikki määritelmät voi poistaa `restart`-käskyllä, mutta teksti jää näkyviin ja käskyt voi antaa (esim. korjattuina) uudelleen.

- Laskutoimituksia lukuunottamatta muut käskyt toimivat kuten funktiot, eli niitä käytetään tyyliin `funktionnimi(muuttuja);` tai mahdollisesti tarkenteiden kanssa muodossa `funktionnimi(muuttuja, tarkenteita);` alkuhaparoinnin jälkeen **ei saa** enää tehdä sellaisia virheitä kuin `sin x`, `sinx`, `exp^x`, `exp^(x)`. Oikeat muodot ovat siis `sin(x)`, `exp(x)`.

- Jos käsky kirjoitetaan heittomerkkien sisään, saadaan sen symbolinen muoto: esim. `'sin(Pi)'=sin(Pi);`

- Ohjelman toimintaan ei vaikuta se, missä järjestyksessä käskyt ovat työarkilla, vaan se, **missä järjestyksessä käskyt on suoritettu**. Selvyyden vuoksi kannattaa toki edetä ylhäältä alas.

- Työarkin lataaminen (FILE-valikon avulla) Mapleen ei aiheuta siinä olevien komentojen suorittumista. Komennot on joko "napsuteltava" ENTER:llä tai suoritettava EDIT-valikon "Execute worksheet"-valinnalla, jos näin halutaan.

Vakiot ja alkeisfunktiot:

- `abs` Itseisarvo tai moduli: `abs(-3);`

- `arcos, arcsin, arctan, arccot` Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot: `arctan(1);`

- `argument` Kompleksiluvun argumentti (vaihekulma): `argument(I);`

- `cos, sin, tan, cot` Trigonometriset funktiot: `sin(Pi/6);`

- `exp` Eksponenttifunktio: `exp(2*x);` **Huom:** Neperin luku on `exp(1)` eikä sitä voi kirjoittaa millään muulla tavalla.

- `I` Imaginaariyksikkö: `z:= 1+2*I;`

- `ln` tai `log` Luonnollinen logaritmi (`exp`-funktion käänteisfunktio)

- `Pi` Ympyrän kehän pituuden suhde halkaisijaan ≈ 3,14. Symboli `pi` tarkoittaa kreikkalaista kirjainta π.

- `Re, Im` Kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosa: `Re(1-I);`
  Huom: Helpoin tapa muuntaa kompleksiluku tason pisteeksi (= lista): `[Re,Im](2+3*I);`

- `sqrt` Neliöjuuri: `sqrt(1+x^2);`

- symbolien indeksointi: `a[1]:= 6; a[2]:= 9;`

Muita käskyjä:

- `add` Summaa jonon termit: `add(n^2, n=1..100);` Ylärajan oltava numeerinen. Vrt. `sum`. (sum osaa myös symboliselle ylärajalle, jos mahdollista.)

- `alias` Annetaan oma (lyhyt) "lempinimi": Esim: `alias(rref=ReducedRowEchelonForm)`
- `assign` Määrittelee muuttujien arvot annetuista yhtälöistä:
  `fsolve(x^3+x+1=0,x); assign(%);` ("vaarallinen, mutta helppo")
- `CrossProduct` Vektoreiden ristitulo: `CrossProduct(a,b);`
- `D` Derivaatta funktiolle: `f:= x -> x^2; D(f);`
- `Determinant` Neliömatriisin determinantti: `Determinant(A);`
- `diff` Lausekkeen derivaatta:
  `diff(p,x); diff(p,x,x); diff(p, x$5);`
- `display` Grafiikkojen yhdistäminen:
  ```
  A:= plot(sin(x),x=0..Pi):
  B:= implicitplot(sin(x+cos(y))=x, x=0..1, y=0..Pi):
  display(A,B);
  ```
- `DotProduct` Vektoreiden pistetulo: `DotProduct(a,b);`
- `eigenvals` Matriisin ominaisarvot: `eigenvals(A);`
- `Eigenvectors` Matriisin ominaisarvot kertalukuineen ja vastaavat ominaisvektorit: `Eigenvectors(A);`
- `eval` Evaluoi lausekkeen (laskee arvon). Useimmin käytetty muoto: `eval(lauseke, x=a)` (Vrt. subs, jossa päinvastainen järjestys.)
- `evalc` Sieventää kompleksilukuja koskevia lausekkeita:
  `sqrt(1+I); evalc(%);`
- `evalf` Laskee liukulukulikiarvon (määrätyllä tarkkuudella):
  `evalf(Pi); evalf(Pi,100);` (f - float)
- `expand` Laskee lausekkeen auki: `expand((x+y)*(1-x));`
- `for` Toistokäsky: `for n from 1 to 10 do a[n]:= sin(Pi/n) end do;`
  Huom: Tämän toiston jälkeen muuttujalle n jää arvoksi 11.
- `fsolve` Yhtälön numeerinen ratkaiseminen: `fsolve(x^3+x=1,x); fsolve(x^3+x=1,x,complex);`
- `implicitplot` Piirtää tasokäyrän pelkän yhtälön perusteella:
  `implicitplot(x^2-x*y+y^2=1, x=-2..2, y=-2..2);` (Vrt. `contourplot`)
- `int` Integroimiskäsky: `int(sqrt(x+x^2), x=0..1);`
  Numeerisesti: `evalf(Int(f(x), x=a..b));`
- `inverse` Käänteismatriisi: `inverse(A);` (vanhassa `linalg`:ssa (Uudempi `MatrixInverse` `LinearAlgebra-kirjastossa`)

- `LinearSolve` Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaiseminen: `LinearSolve(A,b);`
  Toimii vain silloin, kun ratkaisu on yksikäsitteinen.

- `map` Kuvaa funktion jokaiseen listan alkioon: `map(x->x^3, [a,b,c]);`

- `Matrix` Matriisin rakentaminen:
  `Matrix([[a,b],[c,d]]);`

- `nops` listan pituus (number of operands): `nops([a,b,c,d]);`

- `plot` Kuvaajan piirtäminen:
  `plot(sin(x),x=0..Pi); plot([sin(x),cos(x)],x=0..Pi);`

- `product` eli tulo, kertoo jonon termit: `product(1/n^2, n=1..10);`

- `restart` Poistaa muistista kaikki määrittelyt.

- `seq` Jonon muodostaminen: `seq(n^2, n=1..5);`

- `simplify` Lausekkeen sieventäminen: `simplify(%);`

- `solve` Yhtälön ratkaiseminen (tarkasti): `solve(x^2+x=1,x);`

- `subs` Sijoituskäsky: `subs(x=1,polynomi);` **Huom:** Ei muuta *polynomi*n määrittelyä. (Vrt. `eval(polynomi,x=1);`)

- `sum` Summaa jonon termit: `sum(n^2, n=1..100);` (vrt. `add`). `sum` suorittaa myös symbolista summausta.

- `Vector` Vektorin muodostaminen: `Vector ([1,3,5]);`

- `with` Lisäpakettien latauskäsky: `with(plots); with(LinearAlgebra);`

Tietorakenteita:

- Jono on Maplessa kokoelma pilkulla erotettuja olioita, esim. `jonoA:= 3,4,5,f,sin(7);`
  tai `jonoB:= seq(n^3, n=-3..8);` Jonojen alkioihin voi viitata muodossa `jononnimi[moneskoalkio`

- Lista on täsmälleen sama kuin `[jono]`.

Tavallisimpia virheitä:

- Käsky on väärin kirjoitettu: sulkuja puuttuu tai ne eivät täsmää.

- Määrittelyssä on käytetty `=` eikä `:=`

- Jonot, listat tai vektorit sekaisin: kaikki ovat eri asioita.

- Lausekkeet ja funktiot sekaisin.

- Muuttujilla on vanhoja arvoja aikaisemmista laskuista.
- `restart`-käskyn jälkeen ei ole suoritettu kaikkia tarvittavia käskyjä.
- %-merkki viittaa viimeisen **suoritetun** käskyn tulokseen, esimerkiksi virheilmoitukseen. % ei automaattisesti tarkoita työarkilla heti yläpuolella

Tiedoston Latex-koodi: (Muokkaa tarpeittesi mukaan)
../mplteht/mplBasic/mplBas000.tex

Tiedosto: mplBas001.tex
Ohjelmat: Maple, [Mathematica]

Sievennä lauseke
$$\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}.$$

Vihje
Kokeile funktiota `simplify`.

Vaativuus: 1-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas001.tex

Avainsanat:mplBasic, Mapleperusteet, simplify

---

mplP002.tex (P. Alestalo P1 s.2011)

1. Tässä on ohje-ja pohjatyöarkki (mw), lataa se Mapleen.
   (Tässä näet työarkin pdf-muodossa.)

   Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

2. a) Kokeile Maplen voimia seuraavien sarjojen kohdalla:
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$$

   b) Montako termiä hajaantuvasta sarjasta
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
   on otettava mukaan, jotta vastaava osasumma olisi vähintään 100?
   (`sum, evalf, infinity`)

Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas002.tex

Avainsanat: Mapleperusteet, sarjan summa, sum, evalf, infinity

---

mplBas002a.tex (P. Alestalo P1 s.2011)

Fibonaccin lukujono (f_n) määritellään alkuehdoilla $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ ja palautuskaavalla $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, kun $n \geq 2$. Samat luvut saadaan suoraan lausekkeesta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$$

arvolla $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Määrittele $f_n = f(n)$ funktiona ja osoita, että sekä alkuehdot että palautuskaava toteutuvat.
Vihje: Määrittele aluksi `phi:= ...` Palautuskaavan kohdalla on helpompi osoittaa jokin lauseke nollaksi kuin verrata kahta hankalaa lauseketta.
(`sqrt, simplify, expand`)

Muista funktiomääritys:

```
f:=n->...
```

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas002a.tex

Avainsanat: Fibonacci, funktiomääritys, palautuskaava, simplify, expand

---

mplP002b.tex (Pekka Alestalo P1 s.2011)
Intialaisen matemaatikon Srinivasa Ramanujanin (1887–1920) keksimän kaavan mukaan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1103 + 26390n)(4n)!}{396^{4n}(n!)^4}.$$

Tutki (numeerisesti), monennenko osasumman avulla saadaan luvun $1/\pi$ likiarvo 50 desimaalin tarkkuudella.
b) Määrittele sarjan yleinen termi $a_n = a(n)$ funktiona ja laske raja-arvo

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Sarja suppenee siis suunnilleen samaa vauhtia kuin sellainen geometrinen sarja, jonka suhdeluku on q.
(`Pi, sqrt, sum, evalf(luku, desimaalien lkm), limit`)

Muista funktiomääritys:

```
a:=n-> ...
```

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas002b.tex

Avainsanat: Mapleperusteet,mplBasic, sarjat, Pi, sqrt, evalf

---

mplBas004
Suorita Maplella :

```
> series(exp(x), x = 0, 10);  # tai taylor(...);
> p:=convert(%,polynom);
> c:=coeffs(p,x);
> evalf(%);
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu. (Tutki tarvitessasi helpillä tyyliin `?convert`.)

Piirrä polynomin p kuvaaja sopivalla välillä.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas004.tex

Avainsanat: Mapleperusteet,mplBasic, polynomin kertoimet, coeffs, convert(sarja,polynom)

---

mplBas005

Etsi lukujen 1234^{3243} ja 7681 suurin yhteinen tekijä.

Suurin yhteinen tekijä lasketaan funktiolla `igcd`. Jos myös kertoimet halutaan tietää, kannattaa käyttää funktioita `igcdex`.

Vaativuus: 1-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas005.tex

Avainsanat: Mapleperusteet, mplBasic,syt, suurin yhteinen tekija, igcd,igcdex

mplBas006 (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

(a) Laske $2^{123}, \pi^3, e^5$ neljälläkymmenellä (40) numerolla.

(b) Mikä rationaaliluvuista $\frac{22}{7}, \frac{311}{99}, \frac{355}{113}$ approksimoi parhaiten π:tä ?

(c) Kumpi luvuista π^e , e^π on suurempi?

(d) Jaa tekijöihin polynomi $x^3 - y^3$

Vihje

```
?evalf
?factor
```

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas006.tex

Avainsanat:mplBasic,Mapleperusteet, evalf, factor

---

mplBas007.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Määrittele polynomilauseke $p = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.
Määritä p:n juuret ja piirrä kuvaaja välillä, joka sisältää juuret. Määritä myös paikalliset ääriarvot.

```
p:= ...   (ei siis p = ... (kuten Matlabissa))
plot(p,x=a..b)
?plot
solve   yrittaa tarkkaa analyyttista ratkaisua (vaikka onnistuisi, voi olla turhan mu
fsolve  numeerinen ratkaisija
```

Luokittelu: Maple perusteet, lausekkeet, yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas007.tex
Ratkaisu:
pdf-muodossa
mw-tiedosto

Avainsanat:mplBasic,Mapleperusteet, polynomi,nollakohdat, minimit, maksimit, solve, fsolve, diff

---

mplP008.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Piirrä samaan kuvaan x^4 ja 2^x ja selvitä, kuinka monessa pisteessä ne leikkaavat. Varmaan joudut piirtämään useita kuvia eri alueilta.

Suurimman juuren etsimisessä voi oikean alueen ehkä löytää nopeimmin tyyppiä `seq([x^4,2^x],x=a..b)` olevalla komennolla.

Tutki `fsolve`-komennon help-teksti ja määritä likiarvo suurimmalle juurelle.

`seq(f(x),x=a..b)` toimii kokonaislukuaskelin.
Uusimmissa Maplen versioissa voidaan antaa askel h näin:

```
jono:=seq(f(x),x=a..b,h);
```

(Vrt Matlab: `jono=a:h:b`)

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas008.tex

Avainsanat: Maple perusteet, jonot (seq), yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

---

mplP009.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)
Mitä tekevät seuraavat Maple-komennot:

```
> sum(i^2,i=1..10);
> ifactor(1998); # Maple-oppaan kirjoitusvuosi
> ifactor(2015); # Aikaa on kulunut.
> solve({x+2*y=5,x^2+y^2=10},{x,y});
> solve([x+2*y = 5, x^2+y^2 = 10], [x, y])
```

Kaksi solve-komennon muotoa liittyvät tietorakenteisiin. Edellinen käsittelee joukkoina, jälkimmäinen listoina. (Joukon alkioilla ei ole määrättyä järjestystä päinvastoin kuin listassa.)

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas009.tex

Avainsanat: Mapleperusteet, yhtälöryhmä, joukko, lista, tekijöihin jako.

---

mplBas010.tex
Muodosta funktion $\cos(x)\sin(x)$ ensimmäinen ja toinen derivaatta ja piirrä kunkin kuvaaja sopivaksi katsomallasi välillä kenties mieluiten eri koordinaatistoihin.

Vaativuus: 1-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas010.tex

Avainsanat: Mapleperusteet, mplBasic, diff, simplify, perusssievennys, plot

---

mplBas011.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.

Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $\frac{x+1}{x^2+1}$, $\cos(x^2 + 1)$, $\arcsin(2x + 3)$, $\sqrt{1 + x^4}$, $\arctan x$

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas011.tex

Avainsanat: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff

---

mlBas014.tex, mplBas014.tex
Maple [Mathematica] , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = 1 + \frac{sin(x)}{1 + x^2}.$$

a) Maple: Määrittele f lausekkeeksi, laske f:n arvo pisteessä $x = -2.0$ ja piirrä kuvaaja välillä $[-5, 5]$.

Matlab:
Tee vastaava asia Matlabilla, kirjoita skripti. Huomaa, että Matlabissa täytyy ensin antaa x:lle numeerinen (vektori)arvo.

b) Tee samat asiat, mutta nyt määrittelemällä f funktioksi.

a)

```
   Maple                                 Matlab:

> f:=1-...                              >> x=...
> subs...                               >> f=...
> plot                                  >> plot
```

b)

```
    Maple                               Matlab

> f:=x->1-...                          >> f:=@(x) 1-...
```

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas014.tex
Ratkaisu:
../mplteht/mplBasic/ratkaisut/mplBas014R.pdf
../mplteht/mplBasic/ratkaisut/mplBas014R.mw (Maple worksheet)

Avainsanat:
Mapleperusteet, funktiot, lausekkeet, Matlabperusteet

---

mplBas015.tex
Laske funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvoja 0.5:n välein välillä $0 \ldots 5$, ja piirrä taulukoiduista arvoista kuvaaja

Vihje
Määrittele f funktioksi tyyliin `f:=x-> ...`
Muodosta jono seq-funktion avulla ja ympäröi se listasuluilla tyyliin: `h:=0.5: x:=[seq(k*h),k=...]`
Nykyversioissa on myös muoto `seq(a,b,h)`, joka vastaa Matlab:n lauseketta:
`a:h:b`. Muodosta funktion arvot tyyliin `y:=map(f,x)`
Taulukon saat kenties selkeimmän tyyliin

```
with(linalg)
transpose(matrix([x,y]))
```

(Vaikka suosimme uudempaa, *LinearAlgebra*-kirjastopakkausta, joihinkin operaatioihin “vanha” *linalg* soveltuu paremmin.)

Datan voi piirtää nykyisin myös "Matlab-tyylillä": `plot(x,y)`

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas015.tex
Ratkaisu:
../mplteht/mplBasic/ratkaisut/mplBas015R.mpltxt(Maplekomennot tekstimuodossa)

---

mplBas017.tex [mplODE017.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplBasic/mplBas017.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE019R.pdf
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE019R.mw

Avainsanat: mplODE,Mapledifferenssiyhtälöt,Mapleperusteet,mplBasic

---

Luokittelu: Differenssi- ja differentiaaliyhtalot, Maple-perusteet.

mplKompleksi

mplCA000.tex
Maple-ohjeita muutamaan seuraavaan tehtävään

`plot, seq, map, subs, with(plots), complexplot, plot3d`

seuraavassa x**plot**y tarkoittaa mitä tahansa piirtofunktiota.

```
with(plots):       # Ladataan lisägrafiikkakirjasto
kuva1:=xploty(...): # Kuvan tallettaminen muuttujaan.
kuva2:=xploty(...): #  ... ja toinen.
display(kuva1,kuva2);  # Näin yhdistetään grafiikkoja.

F:=2*x+exp(x*y); # Lausekkeen arvo muuttuu, kun x ja y muuttuvat.
             # MUTTA:  F(x,y) tai F(a,b) on vailla mieltä!
             # Jos halutaan laskea F:n arvo, kun x=a, y=b, komennetaan:
subs(x=a,y=b,F);

f:=(x,y)-> 2*x+exp(x*y);  # Funktiomääritys.
f(a,b)   # toimii nyt.
```

Lisää tähän omia ohjeitasi/poista tarpeettomia!

"Tehtävän" Latex-koodi:
../mplteht/mplComplAnal/mplCA000.tex

Avainsanat: mplComplAnal,Kompleksianalyysia Maplella, Maple-ohjeita, mapleohjeet.
Maplefunktioita:

---

1. mplK002.tex
Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

Vihje: Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

Avainsanat: Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

mplCA003.tex
Käsinlasku
Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman α verran. Tämähän on vanha tuttu olio, tason $\mathbb{R}^{\not{\!\!2}}$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha}z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$

Pieni ("vapaaehtoinen") jatko-osa:

Tästä on helppo yleistää mielivaltaisella kompleksiluvulla $Re^{i\alpha}$ kertomiseen. Miten kuvausta voi sanoin kuvailla ?

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplComplAnal/mplCA003.tex

Avainsanat: Kompleksiluvut, tason kiertokuvaus.

Maplefunktioita:

---

2. mplK004.tex
Ykkösen n:nsien juurien käsittelyä varten määrittele Maple-funktio

```
w:=(k,n)->exp(I*2*k*Pi/n);
```

Piirrä yksikköympyrä ja kaikki $\sqrt[n]{1}$:t joillakin n:n arvoilla.

Laadi sitten Maple-skripti, jolla voidaan laskea ja piirtää syötteenä annetun mielivaltaisen kompleksiluvun kaikki n:nnet juuret.

```
> z:=2+3*I : n:=10:   % Muuteltava syöterivi
> juuret:=seq(w(k,n),k=0..n-1);
> ? complexplot
```

Huomaa, että $e^{i\Theta}$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ "piirtää" yksikköympyrän. `complexplot` on juuri reaalimuuttujan kompleksiplotti.

Kts. tarkemmin
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/H/complex6.html`

Tässä pikatietoisku kompleksiluvuista:

`http://www.math.hut.fi/opetus/Mattie/Mattie0/Luentomatskua/kompleksianalyysi/kompluvut.html`

Avainsanat: Kompleksiluvut, ykkösen juuret, complexplot

3. mplK002.tex
Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

Vihje: Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

Avainsanat: Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

mplCurve fitting

4. H2T12.tex/mlCF07.tex/mplCF07.tex // Matlab,Maple,[Mathematica]

W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

Number	Year
1	1761
75	1771
155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1782
503	1786
575	1789
626	1791

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

Vihje: Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

5. Maple tai Matlab
Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \ldots N$$

mukaan.

Vihje: Polynominen interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio g kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Sopii aivan yhtä hyvin Maplelle.

mplCF01.tex [Sama Matlab:lla: ...mlCF01.tex]

Hermiten interpolaatio: Interpolaatioehdoissa esiintyy myös derivaattoja.

Määritä 4. asteen polynomi p, joka toteuttaa ehdot:

$$p(0) = p'(0) = 1, p(1) = p'(1) = p''(1) = 2.$$

(a) Käsittele polynomi lausekkeena.
Tarkista tulos sopivasti `subs`-komennoilla ja piirrä kuva/kuvia polynomista ja derivaatoista.

(b) Käsittele polynomi funktiona.

Huom: 5 ehtoa ja 5 tuntematonta kerrointa $\Longrightarrow$ järkevän tuntuinen tehtävä. Yleisesti "järkevälläkään" Hermiten interpolaatiotehtävällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua (kuten ei neliömatriisin määräämällä lineaarisella yhtälöryhmälläkään – siitähän on kyse). Pelkkiä funktion arvoja koskevalla interpolaatiotehtävällä aina on (koska "Vandermonden neliömatriisi" on aina ei-singulaarinen).
Tässä opetellaan erityisesti Maplen kätevää ratkaisutekniikkaa.

Vihje
Kirjoita polynomi lausekkeeksi tyyliin:
`p:=a*x^4+b*x^3 + .... ,`
missä $a, b, \ldots, e$ ovat määrättävät kertoimet.
Derivaatta: `diff`
Arvojen (x=0,x=1) sijoittaminen p:n lausekkeeseen: `subs`
Yhtälön ratkaiseminen: `solve`

Kaikista saat tietoa näin `?diff`, ...

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi: ../mplteht/mplCurveFit/mplCF01.tex
Ratkaisu:
pdf-muodossa
mw-tiedosto

Avainsanat: MapleCF, Curve fitting,käyrän sovitus, interpolaatio

[Sama Matlab:lla ...mlCF15.tex]

Opettajalle: (a)-kohta sopii ensitutustumiseen.
(b)-kohta on sikäli huono, että virhetermin suuruusluokka on toisesta maailmasta (opettavaista kylläkin, mutta alkajaisiksi vaatii ainakin varoituksen).
Lisää tehtävän opetuksia ratkaisutiedostoissa.

(a) Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1 + x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0, 3]$.Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

(b) Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

Lause Olkoot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ erilliset pisteet ja f $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio x_k-pisteet sisältävällä välillä. Jos p_n on (1-käs) dataan $(x_k, f(x_k))$ liittyvä interpolaatiopolynomi, niin

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Tässä on mahdollista harrastaa Maplen ja Matlabin yhteistyötä. Virhekaavan derivaatta muodostetaan tietysti Maplella ja lauseke sievennetään. Itse asiassa piirtämällä ja poimimalla kuvasta maksimipisteen koordinaatit, saadaan riittävän hyvä arvio.
Toinen mahdollisuus on käyttää Matlabin symbolic toolboxia.

Tulotermin voisi hoitaa tehokkaimmin Matlabissa ottamalla tiheän diskretoinnin ja käyttämällä max-funktiota. Maplessakin on max-funktio, lakenta on Matlabissa tehokkaampaa.
Miten tulotermi lasketaan Matlabissa? Vaikka tähän tapaan:
1. `x=linspace(....,N)`
2. Tedään matriisi X, jossa x-vektoreita allekkain n+1 kpl.
3. Tehdään matriisi X0, jossa rivit

```
x0 x0 ... x0   N kpl.
x1 x1 ... x1   N kpl.
 ...
xn xn ... xn   N kpl.
```

Nämä syntyvät vaikka `meshgrid`-komennolla tai ulkotuloilemalla ykköspystyvektorilla.
4. Vähennetään matriisit ja `prod())`. Sitten vain `abs` ja `max` kehiin.

Tosi Matlabmaista! (Ei moitita, vaikka tekisit for-loopin, vain 8 kertaa käydään, mutta hyvä ymmärtää Matlabin hienoa matriisiajattelua, muistiahan ei nykyisin tarvitse säästellä.)

Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplCurveFit/mplCF03.tex
Ratkaisu:
pdf-muodossa
mw-tiedosto

Avainsanat: Interpolaatio, käyrän sovitus, interpolaatiovirhe, Lagrange MapleCF, Curve fitting

mlCF07.tex/mplCF07.tex [H2T12.tex (kevät 2012)]
Matlab,Maple,[Mathematica]

W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

```
Number    Year
1         1761
75        1771
```

155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1782
503	1786
575	1789
626	1791

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

Vihje:
Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplCurveFit/mplCF07.tex

Avainsanat: MapleCF, Curve fitting,käyrän sovitus, interpolaatio, ... add more ...

---

mplCF11.tex
Maple tai Matlab
Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \dots N$$

mukaan.

Vihje
Polynomi-interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio g kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi: ../mplteht/mplCurveFit/mplCF11.tex

Avainsanat: MapleCF, Curve fitting,käyrän sovitus, interpolaatio

H2T14.tex/mlCF13.tex/mplCF13.tex
Matlab,Maple,[Mathematica]

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
76	92	106	122	132	150	179	203	226	248

Tee polynomi-interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Sovita myös eriasteisia PNS-polynomeja, vrt. Matlab Censusgui, lue Molerista:

http://www.mathworks.se/moler/interp.pdf Moler: Num. Comp. with Matlab, interpolation

VaatiVuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplCurveFit/mplCF13.tex
Ratkaisu:
../mplteht/mplCurveFit/ratkaisut/mplCF13R.pdf
../mplteht/mplCurveFit/ratkaisut/mplCF13R.mw [mw-tiedosto, lataa Mapleen]

Avainsanat: MapleCF, Curve fitting,käyrän sovitus, interpolaatio

-e

Differentiaaliyhtälöt

6. mplD0009.tex
Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
a) Ratkaise differentiaaliyhtälö alkuehdolla $v(0) = 0$.
b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
Vihje: Ohjelma ei osaa laskea raja-arvoa, koska se ei tiedä vakioiden etumerkkiä. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile uudelleen sen jälkeen.

7. mplD001.tex (infoverkostot (iv) s. 2001) Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dt} = ty$$

.

a.) Muodosta yleinen ratkaisu.

b.) Määritä vakio `_C1` alkuehdolle $y(0) = 1$.

c.) Ratkaise alkuarvotehtävä suoraan `dsolve`:lla.

Vihje: Maplen funktio `dsolve`.
b)-kohdassa voit ottaa ratkaisulausekkeen `rhs` (Righthand side) kiinni. Tarvitset lisäksi komentoja `subs` ja `solve`
c) `?dsolve`, [HAM] ss. 162-165

Ratkaisu:

```
> dyht := diff(y(t), t) = t*y(t)
a)
> ylratk := dsolve(dyht, y(t))
b)
> Y := rhs(ylratk)
> solve(subs(t = 0, Y) = 1, _C1)
Huom! Dokumenttimoodissa alaviiva pudottaa kursorin alaindeksitasolle.
"copy/paste" tarvitaan _C1:lle.
> eval(%)
c)
> dsolve({dyht, y(0) = 1}, y(t))
```

8. mplD002.tex (infoverkostot (iv) s. 2001)

Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (REh) annettuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:

(a) $y' + y = x^2 - 2$, REh: $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$
(b) $y'' + y = 0$, REh: $y = a\cos x + b\sin x$
(c) $y''' = e^x$,
(d) $x + yy' = 0$, REh: $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$, vakio).

Vihje: (d)-kohta: Derivoi implisiittisesti, ts. oleta, että on olemassa derivoituva funktio $x \mapsto y(x)$ s.e. $x^2 + y(x) = C$ ja derivoi puolittain. (Tässä tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ tällainen. Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

Ratkaisu: mplD002R.mw ja .pdf ON

9. mplD0021.tex
Vrt. ... mlD0021 ja mlD0021b

Totea Maple:n avulla suoraan yhtälöön sijoittamalla , että

$$y(t) = ce^{-5t}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' = -5y$.

Määritä myös diffyhtälön yleinen ratkaisu sekä alkuhdon $y(0) = c$ toteuttava ratkaisu dsolve-komennolla (kts. vihje)

Piirrä ratkaisukäyräparvi, kun vakio c saa 21 arvoa tasavälisesti välillä [0,4]. (Tai suunnilleen tuonverran)

Piirrä paksummalla viivalla alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttava kuvaaja ja merkitse alkupiste rinkulalla.

Huom: Maplen syntaksi muistuttaa läheisesti muPad:ia. Grafiikoiden yhdistämiseen on Maplessa monipuolisemmat välineet.

Vihje: *Komentoja:* `subs,diff,dsolve,plot,with(plots),display`

```
diffyht:=diff(y(t),t) =-5*y(t)
# tai:
diffyht2:=y'(t)=-5*y(t)
```

Näiden käsittely eroaa, edellinen on lauseketyylinen, jälkimmäinen funktiotyylinen, kuten tulostusmuodosta näkyy.
Normaal subs-toimii edellisessä, mutta ei jälkimmäisessä.
Käytä siis alkuosassa edellistä.

```
?dsolve   # Toimii kumpaankin yhtälömuotoon (tottakai).
ratk:=dsolve({diffyhtalo,y(0)=c},y(t))
Y:=subs(ratk,y(t))  # Mieti, logiikka on kohdallaan.
parvi:=seq(Y,c=0..4,0.2) # Sama kuin matlab:n  0:0.2:4
with(plots)
pkuva:=plot([parvi],t=a..b)  # a ja b tehtävän mukaan.
?plot,options
display(pkuva,plot([[0,1]],style=point,symbol=circle,symbolsize=20),plot(exp(...),t=...,thickness=
```

Grafiikkojen yhdistäminen yleisesti Maplella hoituu display-komennolla (edellyttää `with(plots)`-komentoa):
`display(kuva1,kuva2,kuva3)`

Vaativuus: 1

Avainsanat: MapleDiffyht, MapleODE, diffyhtälöt, ratkaisukayraparvi

10. mplD003.tex [Matlab-versio: ...mlD002.tex] (iv3/2001, harj. 1, teht. 2)
Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä (x, y) on $-\frac{4x}{y}$?

Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Ota sitten Maple avuksi. Kokeile ja selitä!

Vihje: Kts. [HAM] ss. 169-170

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
Suoraparven saat tyyliin

```
> yparvi:=seq(...,c=[-2,-1,-.5,.5,2,1]) # tms.
> isokl:=plot([yparvi],x=...)
```

Yleisemmin isokliinit saadaan piirretyksi *implicitplot*-funktiolla, mutta tässä saatiin ratkaistussa muodossa suoraan.

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

11. mplD004.tex [Matlab-versio: ...mlD004.tex] (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 1-2)

Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa = m ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuskerroin = b. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81 m/s^2$.

Piirrä suuntakenttä.

Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10 m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

Käytä Matlab-piirroksiin funktiota `dfield8` ja Maplessa DEtools-kirjaston DEplot-funktiota.

Vihje: Kts. [HAM] ss. 169-170 tai `?DEplot`

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
dfield-ohje:
Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

Avainsanat: MatlabDy, MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

12. mplD005.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 2)

Muodosta edellä olevan laskuvarjotehtävän (mplD004) analyyttinen ratkaisu muuttujien erottelulla. Määritä edellä mainittu ($v(0) = 10$)-ratkaisukäyrä. Tarkista ratkaisu Maplella ja kokeile lopuksi Maplen `dsolve`- komentoa. (Ohje [HAM]-kirjassa.)

Vihje: Ohje analyyttiseen: Muistathan, että osamurtohajoitelma on hyödyllinen rationaalilausekkeen integroinnissa (Maple: `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);` mutta osattava myös käsin).

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, muuttujien erottelu, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

13. mplD006.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 3)
Vaihdamme tässä LAODE-tyyliseen notaatioon: t on riippumaton muuttuja, x on "riippuva" muuttuja. Kannattaa totutella eri tyyleihin.

Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$, $x(0) = -1$. Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

Suorita ratkaisu näin:

- Ratkaise ensin vastaava (HY) $x' = \frac{x}{2}$ (yleinen ratkaisu).
- Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yyn).

Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (Maple: DEtools[DEplot], Matlab: `dfield8 tai suuntak1`).
Miten näet suuntakentästä, että yhtälö ei ole autonominen?

Avainsanat: MapleDy, lineaariset diffyhtälöt, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[LAODE]` Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

14. mplD007.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 1)
Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi. (Kyseessähän on lineaarinen, mutta ei-vakiokertoiminen yhtälö.)

Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

Piirrä suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktion avulla (kts [HAM] s. 169), voit toki käyttää myös Matlab:n dfield8-funktiota (ohje alla).

Valitse alkuarvoja y_0 väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa y_0, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon y_0:lle.

Vihje: dfield-ohje: Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt,erf, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

15. mplD008.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 2)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää $xy' = 4y, \quad y(0) = 1.$

(a) Osoita, että tehtävällä ei ole ratkaisua. Osoita, että tämä ei ole ristiriidassa $\exists_1$-lauseen kanssa. (Huom: Lauseen avulla *ei voi todistaa epäeksistenssiä*, koska lauseen ehdot eivä ole välttämättömät.)

(b) Vaihdetaan alkuehdoksi: $y(0) = 0$. Miten nyt on ratkaisujen laita.

(c) Mitä voit sanoa alkuehdon $y(x_0) = y_0$ tapauksessa, jos $x_0 \neq 0$,
(A) suoraan ratkaisukaavan avulla, (B) $\exists_1$-lauseen avulla.

Vihje: Tämä on puhtaasti “perinteinen” tehtävä, mutta havainnollistus Maple/Matlab-välineillä on hyvinkin paikallaan.

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, eksistenssilause, mplDifferentiaali(yhtälöt)

16. mplD009.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 3)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonon muutama termi (AA)-tehtäville

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$

Määritä myös tarkka ratkaisu.

Vihje: LV-tehtävässä palataan asiaan Maple-hommana. Tämä on tyypillistä symbolilaskennan vahvuusaluetta.

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)

17. mplD010.tex (iv3/2001, harj. 2, LV teht. 1)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonoa pitemmälle kuin AV-tehtävässä samoille (AA)-tehtäville (a), (b), (c) ja lisäksi vielä (d): lle.

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (d) $y' = 3\frac{y}{x}$

Laske myös tarkka ratkaisu Maplella ja piirrä se ja iteraatiojonon funktioita. (Jos tuntuu liian pitkältä, niin jätä yksi pois, hyvä olis saada kaikki yhteisesti katetuksi (vaikka parityöskentelyssä sopimalla).

Vihje: Malli: Aputiedostossa mplD010apu.zip on `L4Picard.mw`,`L4Picard.pdf`,`L4exa2.mw`, `L4exa2.pdf`, kts. myös [HAM] ss. 162–165 (`dsolve`)ja s. 126 *Picard–Lindelöf*

Avainsanat: diffyhtälöt, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)
Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

18. mplD011.tex

(a) Sovella *Picardin* iteraatiota (tuttuakin tutumpaan) (AA)-tehtävään

$y' = y, \quad y(0) = 1$. Osoita, että iteraatiojono lähestyy ratkaisufunktiota $y(x) = e^x$.

(b) (Olkoon vaihteeksi $x(t)$.)
Olkoon alkuarvotehtävänä edelleen $x' = x, \quad x(0) = 1.$

Osoita, että jos lasketaan likiarvo $x_n = x_h(t_n)$ EM:llä pisteessä $t = t_n$ käyttäen askelpituutta h, niin $x_h(t_n) = c(h)^{t_n}$, missä $c(h) = (1 + h)^{1/h}$.

Osoita tämän nojalla, että kiinteällä $t = t_n$ pätee $\lim_{h \to 0} x_h(t) = e^t$.

Vihje: Tehtävässä tuskin tarvitaan ohjelmistoja.
EM = *Eulerin menetelmä*

19. mplD012.tex
Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] := 1;
for k from 0 to n-1 do      #  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= evalf(y[k]+h*f(k*h,y[k])) #    (samoin)
end do;
```

Piirrä Eulerin murtoviivat eri väreillä samaan koordinaatistoon.

Vihje: Datan piirto sujuu nykyisin "Matlab-tyylisesti":

```
> xlista:=[seq(j*h,j=0..n)];
> ylista:=[seq(y[j],j=0..n)]
> plot(xlista,ylista)
```

[HAM]-viitteessä ss. 94-96 esitetyt tavat pisteparien listana toimivat myös, mutta s. 96 zip-temppu ei ole enää tarpeen.

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

20. mplD013.tex
Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje: Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

21. mplD014.tex Maple,Matlab

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve, Matlab: ode45

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:

Coombes et al: Differential equations with Maple, Wiley
Boyce - DiPrima's: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,Wiley

22. mplD015.tex Maple,Matlab
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{3t^2}{(3y^2-4)}, \quad y(1) = 0.$$

(a) Laske EM:llä ratkaisuapproksimaatiot pisteissä $t = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ käyttäen askelta $h = 0.1$.

(b) Tee sama askeleella $h = 0.05$.

(c) Vertaa tuloksia.

(d) Piirrä suuntakenttä ja ratkaisuapproksimaatioita, sekä EM-ratkaisuja. Osaatko selittää, miksi EM toimii kohtuullisesti alussa, mutta kelvottomasti lopussa?

Vihje: Eulerin menetelmää voi tässä käyttää ohjelman (MMM) laskintyylillä, kuten edellä tai sitten oikeaksi funktioksi koodatulla versiolla, annetaan tässä nuo koodit.

Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin *apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:

`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

23. mplD016.tex (vrt. Matlab: mlD007.tex)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y - \ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä

a) Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$,

b) Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$,

c) RK4- menetelmällä askelpituudella $h = 0.4$.

Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa.

Huomaa, että näillä askelpituuksien valinnoilla funktion arvojen laskentamäärät ovat samat.

Vihje: Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin mplD016apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Laitetaan myös Heun ja RK4

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Huom: Tästä voi kehitellä monenlaisia tehtävävariaatioita, myös ilman numeeristen menetelmien korostusta.

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:

[KRE] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
[HAM] Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

24. mplD017.tex, mlD007.tex
Huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$$y' = ay - by^2$$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun t mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

Opettajalle: Tehtävä voidaan käsitellä ehkä luontavamminkin kokonaan erillisenä numeeristen diffyhtälöratkaisujen opetuksesta. Tällöin otetaan vain alla olevat kohdat (c) ja/tai (d).

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämllä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella (kyseessähän on *Bernoullin yhtälö.*

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.)
kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.html#splinit`
(Nykyään (2012) ei tarvita erillistä splinisovitusta, laskentapisteet voidaan antaa suoraan ode45-funktiolle syötteenä.)

Vihje:

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Tämä vain kehittely- ja opettelutarkoituksessa.
% Funktio eulerV hoitaa niin skalaari- kuin vektoriversion.
%  (24.2.04, modifioitu 21.8.2010)
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
%       f=@(t,y)t+y
%       [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6), plot(T,Y,T,Y,'.r');shg
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; %Pystyvektorit yhdenmukaisesti ode45:n
Y(1)=ya;                   %  kanssa
for j=1:n
   Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

25. mplD018.tex, mlD008.tex
Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (saat käyttää Mapleakin.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.
Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.) ** Tulee aputiedostoon **

** apu puuttuu, editoi viitteet! **

Vihje:

Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

26. mplD019.tex [mplP017.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö y_k:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Luokittelu: Differenssi- ja differentiaaliyhtalot, Maple-perusteet.

Vihje:

27. Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] = 1;
for k from 0 to n-1 do  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= y[k]+h*f(k*h,y[k]) (samoin)
od;
```

Vihje:

28. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje: Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

29. Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \rho y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

numeerisesti välillä $[0, 20]$, kun $\sigma = 10, \rho = 28$ ja $\beta = 8/3$. Piirrä ratkaisukäyrät samaan kuvaan, ja piirrä käyrät $x(t)$ ja $z(t)$ parametrisesti. Tämän jälkeen piirrä 3-ulotteinen parametrisoitu käyrä kaikista koordinaateista.

Onko ratkaisu rajoitettu? Suppeneeko se kohti jotain arvoa?

Kokeile muuttaa alkuarvoja, sekä parametrien arvoja. Vallitsevan teorian mukaan systeemi on *kaoottinen dynaaminen systeemi*, jonka käyttäytyminen voi muuttua merkitsevästi jo pienistä muutoksista lähtötilanteessa; itse asiassa termi perhosvaikutus keksittiin kuvaamaan juuri tämän systeemin käytöstä.

Vihje: Kolmiulotteinen parametrisoitu käyrä (tai pistejoukko) piirretään MATLABissa funktiolla `plot3`.

30. Maple,Matlab (H2T10)

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve, Matlab: ode45

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

31. Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi, tai toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi. Voit ottaa $g/L = 1$.

Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut.

Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

32. Ratkaise RA-tehtävä

$$y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Maplella. Yritä ensin analyyttista. Jos/kun mitään ei palaudu, voit asettaa esim `infolevel[dsolve]:=3:`. Näet ainakin, mitä Maple yrittää.
Siirry sitten tyyppiin `numeric`, homma sujuu ongelmitta.

Muutaman kokeilun jälkeen huomasin, ettei sujukaan. Numeerisen ratkaisun määritteleminen parametrista riippuvaksi funkioksi on aikamoista temppuilua, tällaisella kurssilla ei kannata siihen paneutua, koska Matlab-ratkaisu on hyvin selkeä ja ongelmaton.

Muutetaan tehtävä helpommaksi:

Suorita Maplella suoraan reuna-arvotehtävän ratkaisu (luultavasti Maple laskee sen differessimenetelmällä). Syntaksi on aivan sama kuin alkuarvotehtävälle, nyt vain annetaan pelkät reunaehdot.

Helpin esimerkkien avulla pääset kiinni ratkaisufunktioon.

33. a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

-e

Differentiaali- ja integraalilaskenta

34. mplDi0001.tex Maple
Määritä funktion $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ nollakohdat ja lokaali max/min. Piirrä funktion ja derivaatan kuvaajat.

Vihje: `solve,evalf,diff,plot`. Yksinkertaisinta ehkä käsitellä lausekkeena, mutta saat kokeilla myös funktiotapaa.

35. mplDi0002.tex
Olkoon
$$f(x) = x^2 \sin(\pi x).$$

a.) Laske $f^{'}(4)$ käyttäen *diff* ja *subs* - komentoja. Laske tarkka arvo ja likiarvo. *Muista:* `Pi` edustaa vakiota π, `pi` edustaa vain vastaavaa kreikkalaista kirjainta ilman semantiikkaa.

b.) Sama *D*-operaattorin avulla.

c.) Miten voit a)-kohdassa muuttaa tuloksen derivaattafunktioksi?

d.) Määritä $f^{'}(4)$ erotusosamäärän raja-arvona.

Vihje: Komentoja: `diff,D,subs,eval,evalf,limit`
Funktiomääritykset: `f:=x->lauseke(x)`
(vrt. Matlab: `f=@(x) lauseke(x)`)
Lausekkeen muuttaminen funktioksi "jälkikäteen":
`F:=unapply(lauseke(x),x`

(lauseke(x) tarkoittaa lauseketta, jossa esiintyy symboli x.)

Huom! Uudet Maple-versiot (16 alkaen) armahtavat käyttäjää myös aiemmin ankarin kielloin varoitetusta funktiomäärityksen muodosta tyyliin:
`f(x):=x*sin(x)` Maple ystävällisesti kysyy, haluatko oikeasti määritellä funktioksi (ja 99%:ssa tapauksista vastaus on YES! (Uskallan sanoa.))

Avainsanat: Maplediff, Mapleperusteet, lauseke/funktio

Vaikeusaste 1.

36. mplDi0002.tex
Olkoon
$$f(x) = x^2 \sin(\pi x).$$

a.) Laske $f'(4)$ käyttäen *diff* ja *subs* - komentoja

b.) Sama D-operaattorin avulla.

c.) Miten voit a)-kohdassa muuttaa tuloksen derivaattafunktioksi?

d.) Määritä $f'(4)$ erotusosamäärän raja-arvona.

37. mplDi001.tex ([HAM] ss. 48-50)
Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.
Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $\frac{x+1}{x^2+1}$, $\cos(x^2 + 1)$, $\arcsin(2x + 3)$, $\sqrt{1 + x^4}$, $\arctan x$

Vihje: Voit myös kirjoittaa lausekkeen työarkille, koskettaa sitä hiiren oikealla "context sensitive" näppäimellä, jolloin saat joukon Maple-komentoja, mm. diff, simplify ym.

Luokittelu, avainsanat: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff

Viitteet:

`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

38. mplDi0011.tex
Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:

$$f := x \to \frac{v\cos(x)\left(v\sin(x) + \sqrt{v^2\sin(x)^2 + 2hg}\right)}{g},$$

missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.

Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele f funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot h, v, g.
- Piirrä funktion f kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi kokeilemalla molempia tapoja: suoraan `maximize` TAI muodosta yhtälö $f'(x) = 0$, ratkaise numeerisesti `fsolve`-käskyllä, laske maksimi.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

39. mplDi002.tex
Olkoon $f(x) = x^2 - 4$. Muodosta integraalifunktiot

$$\int f(x)\,dx, \quad \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Tarkista tulokset derivoimalla.

Vihje: int ja Int. Voit myös aloittaa: int <ESC-näppäily>, saat valikon, josta valitset $\int$-merkin ja täydennät luonnollisen tapaan. Käytä simplify-komentoa tarvittaessa.

Luokittelu, Avainsanat: Maplediffint, int,Int,Mapleperusteet

.

40. mplDi003.tex
Määritä seuraavat integraalit:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt \quad \text{ja} \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Vihje: Ääretön: *infinity*. Huom: Voit kirjoittaa int(ESC), saat valikon, josta voit valita määrätyn integraalimerkin, rajojen paikalle kirjoitat sopivasti, ylärajan voit aloittaa infi(ESC), jolloin Maple antaa taas valikon, josta voit valita ∞-symbolin.
Toki voit kirjoittaa "vanhan hyvän ajan tapaan" int(f,t=0..infinity).

41. mplDi004.tex
Huom! Alla jotkin kaavat html-sivulla epäselviä, suositus: avaa pdf-tiedosto (ellet jo avannut).

Laske seuraavat integraalit. Määräämättömien integraalien tapauksessa tarkista tuloksesi derivoimalla. Määrätyissä integraaleissa, joista Maple ei suoriudu voit käyttää numeerista integrointia. Laske joitakin esimerkkejä (kuten h-kohta) "symbolisesti" ja sitten tulokselle numeerinen likiarvo ja toisaalta suoraan numeerisesti.

Huomaa, että ns. "suljettu muoto" on nykyisin epämääräinen käsite, sillä useat "perinteisesti mahdottomat" integraalit voidaan lausua Maple:n tuntemien erikoisfunktioiden (kuten *erf*) avulla.

- a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ b) $\int x \cos x^2 dx$
- c) $\int sin 3x\sqrt{1-\cos 3x} dx$ d)$\int \ln x dx$
- e) $\int x^2\sqrt{x+4} dx$ f) $\int_0^1 \sqrt{x^4+1} dx$
- g) $\int_0^\pi e^{\cos x} dx$ h) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

Vihje: **Integrointi**komento on `int`. Lisäksi on komennon muoto `Int`, joka on ns. "hidas muoto" `int`:stä ("inert function").
Numeerinen integrointi saadaan aikaan yhdistelmällä `evalf(Int(...))` tai `int(,...,numeric)`.
Muoto `evalf(int(...))` yrittää ensin symbolista, ja evaluoi tuloksen. Jos symbolinen ei onnistu, integroi numeerisesti. Siksi saattaa olla paljon tehottomampi numeeriseen integrointiin.

Avainsanat: mapleDiffint, symbolinen integrointi, numeerinen integrointi,erf

42. mplDi005.tex
Maple, Mathematica , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

Vihje:

Mathematica:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

Maple:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Numeerisessa sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.
Esim: `evalf(Int(f, x = 0 .. 2, digits = 20, method = _Dexp))`

Matlab:
Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi "function handle"). Sitten quad-alkuiset Matlab-funktiot.

Luokittelu:
`mplteht/mplDiffint/mplDixx.tex`, `matlabteht/mlDiffint/mlDixx.tex`
`mmateht/mmaDiffint/mmaDi100`
Avainsanat:
Symbolinen integrointi, numeerinen integrointi, funktiot, lausekkeet

Ratkaisu: ON (mplDi005R.mw, mplDi005R.pdf)

Viitteet:

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/m-files.html` (Matlab:n funktiokahva, function handle)

.

43. mplDi005a.tex (PA, P1, tharj. 2, s. 2011)

Harjoituksessa käytetään Maple-ohjelmaa. Toisen harjoituksen tavoitteena on syventää tietoja funktioiden käsittelystä: aiheina ovat mm. derivointi, maksimointi, yhtälöiden ratkaiseminen (ja iterointi jos jää aikaa). Avaa Viikkoharjoitukset-sivulla oleva työarkki ja käy läpi siinä olevat esimerkit ja tehtävät. Sen jälkeen voit siirtyä alla oleviin tehtäviin, mikäli aikaa riittää.

1. Klikkaa hiirellä Viikkoharjoitukset-sivun tiedostoa maple2.mw (tässä `http://www.math.hut.fi/opetus/Mattie/MattieT/mplteht/mplDiffint/mplDi005aPohja` ja avaa se Maple-ohjelmalla. Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

2. Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
   a) Osoita, että funktio
   $$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right)$$
   toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön.
   b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
   Vihje: `simplify`-käsky ei tee sievennyksiä aivan loppuun, koska se ei tiedä, ovatko m, g, k positiivisia. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile sievennystä sen jälkeen.

3. Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:
   $$f(x) = \frac{v\cos x \left(v\sin x + \sqrt{v^2\sin^2 x + 2hg}\right)}{g},$$
   missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.

   Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele f funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot h, v, g.
- Piirrä funktion f kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi kokeilemalla molempia tapoja: suoraan `maximize` TAI muodosta yhtälö $f'(x) = 0$, ratkaise numeerisesti `fsolve`-käskyllä, laske maksimi.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

Avainsanat: mplDiffint, PeruskurssiP1, putoavan kappaleen diffyhtalo, differenti-

44. mplDi006.tex (Maple, Mathematica)
Laske integraali

$$\int \sqrt{x^4 - 2}\, dx$$

Yritä sieventää tulosta (äläkä masennu, kun ei sievene). Derivoi, sievennä ja hämmästy!

Vihje: Funktiot `int` (ja `Int`).

Tehtävä näyttää kovin viattomalta, mutta tulos voi yllättää ja lisätä kunnioitusta Maplen kykyihin. Samalla näkyy, että integroinnin ns. "suljettu muoto" on nykyohjelmissa huomattavasti laajentunut entisajoista.

Luokittelu, avainsanat: MapleDiffint, integrointi, erikoisfunktiot

45. mplDi007.tex
`[Isr]` s. 46

Ilmapallon tilavuus kasvaa nopeudella $10cm^3/s$. Millä nopeudella säde kasvaa hetkellä, jolloin pallon pinta-ala on $200cm^2$?

Vihje: Periaate: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$, $A(t) = 4\pi r^2$. Derivoidaan: $V'(t)$ = lauseke, jossa esiintyy $r(t)$ ja $r'(t)$ (implisiittinen derivointi). Tästä saadaan yksi yhtälö, josta voidaan ratkaista r' V':n (tunnettu) ja r:n avulla. r saadaan pinta-alaehdosta.

Voit aloittaa vaikka näin:

```
V:=(4/3)*Pi*r(t)^3; A:=4*Pi*r(t)^2;
yht1:=10=diff(V,t);yht2:=200=A;
```

Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $r(t)$.

Ratkaisu:

```
> V := (4/3)*Pi*r(t)^3;
> A := 4*Pi*r(t)^2;
> yht1 := 10 = diff(V, t);
> yht2 := 200 = A;
> r1 := solve(yht2, r(t));
> r1 := max(r1); # Valitaan pos.
> dr := solve(yht1, diff(r(t), t));
> subs(r(t) = r1, dr);
```

Luokittelu, avainsanat: MapleDiffint, implisiittinen dervointi

Viitteet: `[Isr]` Robert Israel: Calculus: The Maple Way, Addison Wesley

46. mplDi008.tex

Missä pisteissä *Cartesiuksen lehden* $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma jonkin koordinaattiakselin suhteen on $= 45°$? Piirrä sekä käyrä että ko. tangentit (ainakin joku tangentti).

Vihje: Implisiittinen derivointi ja numeerinen yhtälön ratkaisu `fsolve` lienevät paikallaan. Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $y(x)$ (tai $x(y)$).

Luokittelu, avainsanat: MapleDiffint, implisiittinen derivointi, yhtälön numeerinen ratkaisu, fsolve

47. mplDi009.tex (Maple, Mathematica)

Muodosta funktion $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ensimmäinen ja toinen derivaatta. Piirrä funktion ja derivaattojen kuvaajat.

Vihje: Derivaatat ovat aluksi todella sotkuisia. Käytä komentoa `simplify` siistiäksesi tulostusta. Kuvat saattavat yllättää ja johdatella pohtimaan, miksi?

Ratkaisu:

```
(Poista kommentit ...)
%> f := x -> arctan(sqrt((1-cos(x))/(1+cos(x))))
%> plot(f(x),x=-2*Pi..2*Pi)
%> df := diff(f(x), x)
%> df:=simplify(df)
%> plot(df,x=-Pi..Pi)
%> d2f:=diff(df,x)
%> simplify(%)
```

Luokittelu, avainsanat: diff, simplify, plot,diffint1, peruskurssi1

48. mplDi010.tex

Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Käytä symboliohjelmissa perinteistä "diffistekniikkaa" kuvan kanssa, Matlab:ssa raakaa "numeronmurskausta" tyyliin: `linspace, plot, zoom`, uusi `linspace` kapeammalla välillä, `find`, ...

Vihje: arcsin on Mathematicassa `ArcSin`, Maplessa `arcsin` ja Matlabissa `asin`. Symbolilaskentaohjelma saattaa johtaa oikeaan tulokseen puutteellisin perustein, jos tarkkoja ollaan.

Ratkaisu: Tämän kohdan ratkaisulinkissä Maple-ratkaisu, Matlab-ratkaisu vastaavassa Matlab-kohdassa (../../matlabteht/mlDiffint/mlDi010R.m ja .pdf)

Avainsanat: Diffint1,max/min, ääriarvot,peruskurssi1

49. mplDi011.tex
Ohjelmat: Maple,Mathematica
Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

Vihje: Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

Ratkaisu: mplDi011.pdf (pdf-tiedosto),
mplDi011.mw (Maple ws)
...mmateht/mmaDiffint/mmaDi107R.nb (Mma-notebook)
Luokittelu:
`mplteht/mplDiffint/mplDi011.tex`, `mmateht/mmaDiffint/mmaDi107.tex`
Avainsanat:
Pinta-ala, integraali,diffintperusteet,peruskurssi1.

50. mplDi012.tex
(Maple,Mathematica)
Määritä ellipsin $9x^2+16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

Ratkaisu: Maple: mplDiffint/mplDi012R.mw
mplDiffint/mplDi012R.pdf

Avainsanat: Diffint1, ääriarvot, peruskurssi1,diffintperusteet

51. mplDi013.tex
(Mathematica,Maple)
Määritä funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$$

integraalifunktio ja piirrä sen kuvaaja. Onko tämä jatkuva? Pitäisikö sen olla jatkuva? Laske funktion integraali jakson $[0, 2\pi]$ yli a) integroimalla analyyttisesti komennolla `Integrate`, b) integroimalla numeerisesti komennolla `NIntegrate`, c) muodostamalla ensin integraalifunktio komennolla `Integrate` ja sijoittamalla rajat tähän korvausoperaattoria käyttäen.

Vihje: Mathematica:
Komennolla `Integrate` lasketaan sekä integraalifunktio että määrätty integraali. Numeeriselle integroinnille (määrätyn integraalin laskemiseen) on komento `NIntegrate`. Korvausoperaattori on `ReplaceAll` eli `/.` .

Maple: Integrointi: int, "hidastusmuoto": Int.

Numeerinen integrointi: `int(lauseke,x=a..b,numeric)`.

Arvon (a) sijoittaminen lausekkeen (F) muuttujaan (x): `subs(x=a,F)`

Ratkaisu:

```
> f := 1/(2+sin(x))  # (Työarkilla matem. notaatio)
> F:=int(f,x)
> plot(F,x=0..2*Pi)  # Oho, integroimisvakiot ei yhteensopivat.
> subs(x=2*Pi,F)-subs(x=0,F)
> simplify(%)       # Ei voi olla, integroitava pos. koko välillä
> int(f,x=0..2*Pi)
> evalf(%)
> int(f,x=0..2*Pi,numeric)
```

52. mplDi014.tex
(Mathematica,Maple)
Laske kardioidin $r = 1 + \cos\varphi$ kaarenpituus. Piirrä kuvio. Miten saat kardioidin kuvan oikeanmuotoiseksi? Tuntuuko saamasi pituus uskottavalta?

Vihje: Kaarenpituusintegraali: $\int ds = \int \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\, d\varphi$.

53. mplDi015.tex
Laske kaksinkertainen integraali

$$\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} x\sqrt{1+y}\, dy\, dx.$$

Laske tarkka arvo sekä likiarvo.

Vihje: Huom: Maplessa voit kirjoittaa integraalit, neliöjuuret ym. matemaattisena notaationa.

Tässä kaksoisintegraalissa syntyy jostain syystä oikeannäköisen matemaattisen kaavan kanssa vaikeaselkoinen virhe:
Error, unable to parse integral ... . Kyse on differentiaalitermin tulkintavaikeudesta.

Perusnotaatio (`int(int(...))`) toimii varmasti.

Ratkaisu:

```
> int(int(x*sqrt(1+y), y = -x^2 .. x^2), x = 0 .. 1)
> evalf(%)
```

Avainsanat: diffint2, kaksinkertainen integraali, peruskurssi2

54. mplDi016.tex
Osoita, että funktio

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

toteuttaa Laplace yhtälön $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

Vihje: Laske osittaisderivaatat `diff`-komennolla. Tulos ei todennäköisesti suoraan anna nollaa, vaan kaipaa sieventämistä. Käytä tähän komentoa `simplify`.

Ratkaisu:

```
> f := 1/sqrt(x^2+y^2+z^2)
> diff(f, x, x)+diff(f, y, y)+diff(f, z, z)
> simplify(%)
```

Avainsanat: diffint2, osittaisderivaatta, Laplacen yhtälö, peruskurssi2

55. mplDi017.tex

a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

Ratkaisu: mplDiffint/mplDi017R.mw ja .pdf

Avainsanat: Osittaisderivaatta, harmoniset funktiot, sekaderivaatat yhtyvät, diffint2, peruskurssi2

56. mplDi018.tex

Approksimoi numeerisesti kahden desimaalin tarkkuudella polun

$$\gamma(t) = (cos(4\pi t), t^2), t \in [0, 1]$$

pituutta. Idea on, että jaat välin $[0, 1]$ n kappaleeseen tasapituisiä välejä, ja lasket näiden välien päätepisteitä vastaavien koordinaattien etäisyydet yhteen. Näin jakoa tihentämällä summan pitäisi lähestyä oikeaa pituutta. Muista, että saat tarkan pituuden laskemalla

$$\int |\gamma'(t)| dt$$

Vihje:

57. mplDi019.tex
Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1, syksy 2011, Pekka Alestalo

Harjoituksessa käytetään Maple-ohjelmaa. Viimeisen harjoituksen tavoitteena on tutustua integraalilaskentaan ja ratkaista siihen liittyvä sovellettu tehtävä. Lopuksi tutustutaan työarkin esimerkkien avulla jonojen, listojen ja matriisien käsittelyyn, jos jää aikaa.

Tarkista oman ryhmäsi aika ja paikka. Ota mukaasi (tämän paperin lisäksi) Viikkoharjoitukset-sivun Maple-pikaohje. Myös aikaisempien kierrosten malliratkaisut kannattaa kerrata.

1. Käy läpi edellisen kerran tehtävä 3 Noppa-sivun malliratkaisun avulla, ellet ehtinyt tehdä sitä viimeksi.
2. Klikkaa hiirellä Viikkoharjoitukset-sivun tiedostoa maple3.mw (puuttuu tästä toistaiseksi) ja avaa se ohjelmalla Maple 15. Käy läpi esimerkit ja laske annetut integraalit.
3. Työarkilla on annettu katenaariin eli ketjukäyrään liittyvä tehtävä, jossa etsitään sellaisen köyden muotoa, jonka pituus on 6 ja jonka päät on kiinnitetty pisteisiin $(0,1)$ ja $(3,2)$. Käy läpi esimerkkilaskut väärästä yrityksestä paraabelin $y = g(x) = Ax^2 + Bx + C$ avulla ja ratkaise sitten tehtävä oikean lausekkeen
$$y = f(x) = \frac{1}{a}\cosh(a(x-b)) + c$$
avulla. Ehdot tulevat siis muotoon $f(0) = 1,\ f(3) = 2$ ja
$$\int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 6.$$
Piirrä lopuksi funktioiden f ja g kuvaajat samaan kuvaan ja vertaa tuloksia.

Hyödyllisiä vihjeitä:

- Kursoria ei tarvitse siirtää rivin loppuun ennen Enter-käskyä!
- Nuolinäppäimillä voi siirtyä yläindeksistä pois; samoin murtolausekkeissa.
- Pikanäppäimiä:
  Ctrl + Delete poistaa käsky- tai tulosrivin
  Ctrl + t siirtyy tekstitilaan
  F5 siirtyy tekstitilassa kaavankirjoitustilaan ja takaisin
  Ctrl + k tekee uuden käskyrivin kursorin yläpuolelle
  Ctrl + j tekee uuden käskyrivin kursorin alapuolelle
  Ctrl + l (l = label) liittää viittauksen aikaisemman tuloksen numeroon

Vihje:

58. mplDi020.tex
Integroi rationaalifunktiot:

$$\text{a)}\quad \frac{x}{2x^2-3x-2} \qquad \text{b)}\quad \frac{x^5+4}{(x^2+2)^2}$$

Saat käyttää Maplea apuna, mutta komennot `convert(lauseke,parfrac,x)` (puhumattakaan `int` :stä) ovat kiellettyjä muuhun kuin tarkistukseen. Katso mallia Maple-työskentelyyn vaikkapa `/p/edu/mat-1.414/L2000/inttekn.mws`:stä. Tehtävien ei pitäisi olla kohtuuttomia kokonaan käsinkään laskettaviksi.

** Linkki tuskin toimii, tee apu.zip **

Vihje:

Viitteitä: Tämä ja seuraavat n. 10 teht. kokoelmasta ... v2-3/H/harj2.tex (** Nootti systeemin rakentajalle(HA) **)

59. mplDi021.tex
Tynnyrin korkeus on h, pohjaympyrösöiden säteet a ja keskikohdalta otetun poikkileikkausympyrän säde b ($a < b$). Laske tynnyrin tilavuus, kun sivulaudat kaartuvat paraabelin muotoisesti.

Vihje: Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica-harjoitteluun.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

.

60. mplDi022.tex
Laske sen alueen pinta-ala, joka on ympyrän $r = a$ sisäpuolella, mutta *Bernoullin lemniskaatan* $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$ ulkopuolella.

Vihje: Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica-harjoitteluun.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

61. mplDi023.tex
Laske asteroidin $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ koko pituus. Piirrä mielellään sekä Maplella (tai Mma:lla) että Matlabilla.

Vihje: Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

62. mplDi024.tex

Ketjukäyrän $y = a\cosh\frac{x}{a}, \quad |x| \le a$ pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy katenoidiksi kutsuttu pinta. Laske sen ala ja piirrä kuva (sopivalla a:lla).

Vihje: Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

63. mplDi025.tex

Määritä ne p:n arvot, joilla seuraavat integraalit suppenevat ja määritä suppenevien integraalien arvot.

$$\text{a)} \quad \int_1^\infty x^{-p}dx \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 x^{-p}dx$$

Vihje: Sopii käsinlaskuun ja Maple/Mathematica(/Matlabkin)-harjoitteluun.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

64. mplDi026.tex

Selvitä, suppeneeko $\int_0^1 \ln x dx$. Integrointiin voit käyttää Maplen `int`-komentoa. Tarjoile ongelma Maplelle raja-arvona, johon sovellat `limit`-funktiota. Selvitä tuloksen oikeellisuus.

Vihje:

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

65. mplDi027.tex

Eulerin Γ-funktio määritellään kaavalla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0$$

a) Osoita, että integraali suppenee aina kun $x > 0$.

b) Johda osittaisintegroimalla palautuskaava $\Gamma(x)$:lle $\Gamma(x-1)$:n avulla ja osoita sitä käyttäen, että $\Gamma(n+1) = n!$, kun $n = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Tutustu Gamma-funktioon piirtämällä Maplella tai Matlabilla. Huomaa, että Matlabissa ei ole (ollut) muuta tapaa $n!$:n laskemiseen kuin Gamman avulla. Pikku tarkennus (v. 2012): No, tokihan voi laskea: `prod(1:n)`, mutta uudemmissa versioissa on myös *factorial*.

Vihje: a)- ja b)-kohdat käsinlasku(pää-päättely)tehtäviä.

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1

66. mplDi028.tex (Maple,Matlab)
Selvitä, miksi seuraava Matlabin komentojono antaa exp-funktion (0:ssa muodostetun) Taylorin n-asteisen polynomin kertoimet.

```
n=10,c=1:n,c=gamma(c+1),c=1./c,c=[1,c]
```

Huomaa, että kertoimet ovat kasvavan potenssin mukaan, joten jos/kun halutaan laskea `polyval`-funktiolla arvoja, on tehtävä `y=polyval(fliplr(c),x);`

a) Piirrä exp-funktio ja sen Taylorin polynomit $T_k(x, 0)$, arvoilla $k = 1 \ldots 10$.

b) Suorita Maple-komento
`seq(eval(subs(x=0,diff(exp(x),x$k) )),k=1..5);` Se antaa varmasti idean, miten Maplen ja Matlabin yhteistyöllä voi kätevästi laskea minkä tahansa funktion Taylorin polynomeja x-vektorissa. Muodosta tällä tavoin joidenkin funktioiden Taylor-polynomitaulukoita ja kuvia.

c) Muodosta ja piirrä edellisiä suoraan Maplella .

d) Kirjoita edellä olevat ideat (pieneksi, 2–3 komentoa) funktioksi `taypolkert`, joka yksinkertaisesti ottaa argumentikseen (Vaikkapa Maplella saatavan) derivaattajonon, jossa siis käsiteltävän funktion derivaatat on laskettu kehityskeskuksessa. Funktion tulee palauttaa Taylorin polynomin kerroinjono. (Laskentapiste ei näy Matlab-funktiossa argumenttina, se tulee mukaan jo Maple (tai kynä/paperi)-vaiheessa.) Palauta kertoimet alenevien potenssien mukaan, siis “polyval-sopivasti”. Alku voisi olla tällainen:

```
function kertoimet=taypolkert(derjono)
% Lasketaan Taylorin polynomin kertoimet. Asteluku määräytyy
%     derjonon pituudesta
% derjono: [f(x0),f'(x0),f''(x0),...]
% pisteet, joissa lasketaan
```

Testaa funktiotasi ainakin samoilla kuin ennen funktion tekoa. Voi tietysti olla, että haluat mieluummin kirjoittaa funktion muodossa `function y=taypol(derjono,x)` . Tällöin polyval on mukana ja arvot lasketaan siis vektorissa x. No, tee miten haluat!

Vihje:

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint

67. mplDi029.tex (Maple,Matlab)
Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{x^2}dx$$

siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 10^{-6}. Tarkoitus on laskea Taylorin kaavan jäännöstermin avulla, kuinka korkea asteluku tarvitaan, jotta virheraja varmasti alitetaan.

Vertaa laskemaasi approksimaatiota Maplen `evalf(Int(..));` - komennon antamaan arvoon.

Pohdittavaksi: Onko Taylorin polynomin käyttö hyvä numeerisen integroinnin menetelmä? Missä tapauksessa on ja missä ei?

Vihje:

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint

68. mplDi030.tex (Maple,Matlab)
Muodosta lemniskaatan $r^2 = \cos 2\phi$ kaaren pituuden lauseke. Voit integroida välillä $[0, \pi/4]$ ja kertoa tuloksen 4:llä.

Kokeile integroida Maplella, kenties tulos on hieman yllättävä, laske numeerinen approksimaatio `evalf`:lla.

Suorita `with(student):` ja kokeile funktioita `trapezoid` ja `simpson`. Huomaa, että integroitava on singulaarinen päätepisteessä, joten näillä täytyy jättää väli hieman vajaaksi. Pääsetkö lähelle oikeaa tulosta näillä välineillä. Katso myös kuvia, niin integrandista kuin integraalifunktiostakin (Niin, Maple osaa tosiaankin sellaisen muodostaa!)

Vihje:

Avainsanat: mapleDiffint, Mapleperusteet, peruskurssi1,Taylorin polynomi,Matlabdiffint,numeerinen integrointi

69. Selitä, miksi näin saadaan exp-funktion katkaistu Taylorin sarja. Suorita sitten Maplella tämäntyylistä:

```
> series(exp(x), x = 0, 10);  # tai taylor(...);
> p:=convert(%,polynom);
> c:=coeffs(p,x);
> evalf(%);
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu. (Tutki tarvitessasi helpillä komentoja niin Matlabissa kuin Maplessa.)

Piirrä ja taulukoi tulokset.

Vihje:

mplteht/mplDiffint1, Diff-int 1 Maple

Tässä luvussa on tehtäviä differentiaali- ja integraalilaskentaan Maple- ohjelmalla. (Sopivat yhtä hyvin Mathematicalle ja vastaaville.) Ohjeet, ratkaisut, aputyöarkit ym. on tässä tehty Maplelle/Maplella.
Tähän aihepiiriin kuuluvia perustehtäviä on myös mplBasic-osassa.

---

mplDi001 (old mplDi0001.tex)
(Kurssi: 2012 kevät H/H2T15.tex) Määritä funktion $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ nollakohdat ja lokaali max/min. Piirrä funktion ja derivaatan kuvaajat.

Vihje: `solve,evalf,diff,plot`. Yksinkertaisinta ehkä käsitellä lausekkeena, mutta saat kokeilla myös funktiotapaa.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi001.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi001R.pdf
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi001R.mw Maple worksheet,mw-tiedosto

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1,mplIntegraali1, lauseke, funktio

---

mplDi002 .
Olkoon

$$f(x) = x^2 \sin(\pi x).$$

(a) Laske $f'(4)$ käyttäen *diff* ja *subs* - komentoja. Laske tarkka arvo ja likiarvo. *Muista:* `Pi` edustaa vakiota π, `pi` edustaa vain vastaavaa kreikkalaista kirjainta ilman semantiikkaa.

(b) Sama D-operaattorin avulla.

c.) Miten voit a)-kohdassa muuttaa tuloksen derivaattafunktioksi?

(c) Määritä $f'(4)$ erotusosamäärän raja-arvona.

Vihje Komentoja: `diff,D,subs,eval,evalf,limit`
Funktiomääritykset: `f:=x->lauseke(x)`
(vrt. Matlab: `f=@(x) lauseke(x)`)
Lausekkeen muuttaminen funktioksi “jälkikäteen”:
`F:=unapply(lauseke(x),x`

(lauseke(x) tarkoittaa lauseketta, jossa esiintyy symboli x.)

Huom! Uudet Maple-versiot (16 alkaen) armahtavat käyttäjää myös aiemmin ankarin kielloin varoitetusta funktiomäärityksen muodosta tyyliin:
`f(x):=x*sin(x)` Maple ystävällisesti kysyy, haluatko oikeasti määritellä funktioksi (ja 99%:ssa tapauksista vastaus on YES! (Uskallan sanoa.))

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi002.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi002R.pdf
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi002R.mw

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1, Mapleperusteet, lauseke/funktio
Maplefunktioita: `diff,D,subs,eval,evalf,limit`

Viitteet:

[GRES] John T. Gresser: A Maple Approach to Calculus

---

mplDi003 (ent. mplDi0051.tex) (PA, P1, tharj. 2, s. 2011)

Harjoituksessa käytetään Maple-ohjelmaa. Toisen harjoituksen tavoitteena on syventää tietoja funktioiden käsittelystä: aiheina ovat mm. derivointi, maksimointi, yhtälöiden ratkaiseminen (ja iterointi jos jää aikaa). Avaa Viikkoharjoitukset-sivulla oleva työarkki ja käy läpi siinä olevat esimerkit ja tehtävät. Sen jälkeen voit siirtyä alla oleviin tehtäviin.

1. Klikkaa hiirellä Viikkoharjoitukset-sivun tiedostoa maple2.mw
   (tässä ../mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi0003Pohja.mw (Maple-ws)
   ../mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi0003Pohja.pdf (pdf-muoto katsottavaksi) , ja avaa se Maple-ohjelmalla. Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.

2. Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
   a) Osoita, että funktio
$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t\right)$$
   toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön.
   b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
   Vihje: `simplify`-käsky ei tee sievennyksiä aivan loppuun, koska se ei tiedä, ovatko m, g, k positiivisia. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile sievennystä sen jälkeen.

3. Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:
$$f(x) = \frac{v\cos x\left(v\sin x + \sqrt{v^2\sin^2 x + 2hg}\right)}{g},$$
   missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.

   Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele f funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot h, v, g.
- Piirrä funktion f kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi normaaliin tapaan muodostamalla yhtälö $f'(x) = 0$, jonka ratkaiset numeerisesti `fsolve`-käskyllä.
  Kokeile myös “mustaa laatikkoa” `maximize` ja vertaa.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi003.tex

Aputiedostoja:
../mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi003Pohja.mw
../mplteht/mplDiffint1/apusrc/mplDi003Pohja.pdf
Avainsanat: mplDiffint1, PeruskurssiP1,diff,simplify,subs,plot,Pi,assume

---

mplDi004 (ent. mplDi001)
([HAM] ss. 48-50)
Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.
Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \cos(x^2+1), \quad \arcsin(2x+3), \quad \sqrt{1+x^4}, \quad \arctan x$$

Voit myös kirjoittaa lausekkeen työarkille, koskettaa sitä hiiren oikealla "context sensitive" näppäimellä, jolloin saat joukon Maple-komentoja, mm. diff, simplify ym.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi004.tex

Ratkaisu: (Ei tarpeen)

Viitteet:

`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

Avainsanat, Maplefunktioita: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff, simplify

---

mplDi005 (ent. mplDi002)

Olkoon $f(x) = x^2 - 4$. Muodosta integraalifunktiot

$$\int f(x)\,dx, \quad \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Tarkista tulokset derivoimalla.

int ja Int. Voit myös aloittaa: int <ESC-näppäily>, saat valikon, josta valitset $\int$-merkin ja täydennät luonnollisen tapaan. Käytä simplify-komentoa tarvittaessa.

Vaativuus: 1-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi005.tex

Avainsanat: Maplediffint1, mplDiffint1, int,Int,Mapleperusteet

---

mplDi006 (ent. mplDi003)

Määritä seuraavat integraalit:

$$\int_0^\infty e^{-t}\,dt \quad \text{ja} \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Ääretön: *infinity*.
Huom: Voit kirjoittaa int(ESC), saat valikon, josta voit valita määrätyn integraalimerkin, rajojen paikalle kirjoitat sopivasti, ylärajan voit aloittaa infi(ESC), jolloin Maple antaa taas valikon, josta voit valita ∞-symbolin.
Toki voit kirjoittaa "vanhan hyvän ajan tapaan" `int(f,t=0..infinity);`
Vaativuus: 1-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi006.tex

Avainsanat, Maplefunktioita: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1,mplIntegraali1,perusMaple, int,Int,infinity

---

mplDi007 (ent. 004)
Laske seuraavat integraalit. Määräämättömien integraalien tapauksessa tarkista tuloksesi derivoimalla. Määrätyissä integraaleissa, joista Maple ei suoriudu voit käyttää numeerista integrointia. Laske joitakin esimerkkejä (kuten h-kohta) "symbolisesti" ja sitten tulokselle numeerinen likiarvo ja toisaalta suoraan numeerisesti.

Huomaa, että ns. "suljettu muoto" on nykyisin epämääräinen käsite, sillä useat "perinteisesti mahdottomat" integraalit voidaan lausua Maple:n tuntemien erikoisfunktioiden (kuten *erf*) avulla.

- a) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ b) $\int x \cos x^2 dx$
- c) $\int sin 3x\sqrt{1-\cos 3x} dx$ d)$\int \ln x dx$
- e) $\int x^2\sqrt{x+4} dx$ f) $\int_0^1 \sqrt{x^4+1} dx$
- g) $\int_0^\pi e^{\cos x} dx$ h) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

Vihje:
Integrointikomento on `int`. Lisäksi on komennon muoto `Int`, joka on ns. "hidas muoto" `int`:stä ("inert function").
Numeerinen integrointisaadaan aikaan yhdistelmällä `evalf(Int(...))` tai `int(,...,numeric)`. Muoto `evalf(int(...))` yrittää ensin symbolista, ja evaluoi tuloksen. Jos symbolinen ei onnistu, integroi numeerisesti. Siksi saattaa olla paljon tehottomampi numeeriseen integrointiin.
Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi007.tex

Avainsanat: mapleDiffint1, mplDiffint1, symbolinen integrointi, numeerinen integrointi, epäoleellinen integraali, infinity
Maplefunktioita int, Int, evalf(Int(...), int(...,type=numeric), erikoisfunktio, erf,infinity

---

mplDi008 (ent. mplDi005)
Maple, Mathematica , Matlab

(Kurssi: 2012 kevät H/H2T15.tex)

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja, ja päätttele jo kuvasta, mikä integraalin arvo näyttää olevan.

Mathematica:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

Maple:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Numeerisessa sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.
Esim: `evalf(Int(f, x = 0 .. 2, digits = 20, method = _Dexp))`

Matlab:
Symbolisen osuuden voit tehdä Symbolic Toolbox:lla.
Numeerisessa integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi “function handle”). Sitten `help quad`

Matlabissa symboliset operaatiot hoidetaan tyyliin:

```
>> syms x
>> f=...     % Lauseke Maple-syntaksilla, siis kuten Matlab:ssa,
             % mutta ei .*, .^, ./
```

Monet operaatiot, kuten *int*, toimivat Maple-syntaksin mukaisesti.
Joitakin eroavuuksia: *subs(lauseke,OLD,NEW)*, vrt. Maple:
subs(NEW,OLD,lauseke).

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi008.tex

Ratkaisu

Maple

../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi008R.pdf
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi008R.mw

Matlab

../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/html/mlDi008R.html
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mlDi008R.m

Viitteet:

http://math.tkk.fi/ apiola/matlab/opas/lyhyt/m-files.html (Lyhyt Matlab opas:funktiokahva, function handle)

Avainsanat: Symbolinen integrointi, numeerinen integrointi, funktiot, lausekkeet,MapleDiffint1, mplDifferentiaali1,mplIntegraali1

---

mplDi009 (ent. mplDi006.tex) (Maple, Mathematica)
Laske integraali

$$\int \sqrt{x^4 - 2}\, dx$$

Yritä sieventää tulosta (äläkä masennu, kun ei sievene). Derivoi, sievennä ja hämmästy!

Vihje
Funktiot `int` (ja `Int`).
Tehtävä näyttää kovin viattomalta, mutta tulos voi yllättää ja lisätä kunnioitusta Maplen kykyihin. Samalla näkyy, että integroinnin ns. "suljettu muoto" on nykyohjelmissa huomattavasti laajentunut entisajoista.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi009.tex

Avainsanat: MapleDiffint1, integrointi, erikoisfunktiot

---

mplDi010 (ent. mplDi007.tex)
`[Isr]` s. 46

Ilmapallon tilavuus kasvaa nopeudella $10cm^3/s$. Millä nopeudella säde kasvaa hetkellä, jolloin pallon pinta-ala on $200cm^2$?

Vihje
Periaate: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$, $A(t) = 4\pi r^2$. Derivoidaan: $V'(t)$ = lauseke, jossa esiintyy $r(t)$ ja $r'(t)$ (implisiittinen derivointi). Tästä saadaan yksi yhtälö, josta voidaan ratkaista r' V':n (tunnettu) ja r:n avulla. r saadaan pinta-alaehdosta.

Voit aloittaa vaikka näin:

```
V:=(4/3)*Pi*r(t)^3; A:=4*Pi*r(t)^2;
yht1:=10=diff(V,t);yht2:=200=A;
```

Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $r(t)$.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi010.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi010R.mpltxt
(Maple-komennot tekstimuodossa)

Viitteet: `[Isr]` Robert Israel: Calculus: The Maple Way, Addison Wesley

Avainsanat: MapleDiffint1, implisiittinen dervointi

---

mplDi011 (ent. mplDi008.tex)
Missä pisteissä *Cartesiuksen lehden* $x^3 + y^3 = 3xy$ tangentin suuntakulma jonkin koordinaattiakselin suhteen on $= 45°$? Piirrä sekä käyrä että ko. tangentit (ainakin joku tangentti).

Vihje
Implisiittinen derivointi ja numeerinen yhtälön ratkaisu `fsolve` lienevät paikallaan. Huomaa, että `diff` soveltaa implisiittistä derivointia tuntemattomaan funktioon $y(x)$ (tai $x(y)$).

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi011.tex

Luokittelu, avainsanat: MapleDiffint, implisiittinen derivointi, yhtälön numeerinen ratkaisu, fsolve

---

mplDi012 (ent. mplDi009.tex) (Maple, Mathematica)
Muodosta funktion $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ensimmäinen ja toinen derivaatta. Piirrä funktion ja derivaattojen kuvaajat.

Derivaatat ovat aluksi todella sotkuisia. Käytä komentoa `simplify` siistiäksesi tulostusta. Kuvat saattavat yllättää ja johdatella pohtimaan, miksi?

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi012.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi012R.mpltxt

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1, diff, simplify, plot, peruskurssi1

---

mplDi013 (ent. mplDi010.tex) (mmaDi104/mplDi11/mlDi11) ** Tarkista, korjaa **

Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Käytä symboliohjelmissa perinteistä “diffistekniikkaa” kuvan kanssa, Matlab:ssa raakaa “numeronmurskausta” tyyliin: `linspace, plot, zoom`, uusi `linspace` kapeammalla välillä, `find`, ...

arcsin on Mathematicassa `ArcSin`, Maplessa `arcsin` ja Matlabissa `asin`.
Symbolilaskentaohjelma saattaa johtaa oikeaan tulokseen puutteellisin perustein, jos tarkkoja ollaan.

Tämän kohdan ratkaisulinkissä Maple-ratkaisu, Matlab-ratkaisu vastaavassa Matlab-kohdassa (../../matlabteht/mlDiffint/mlDi013R.m ja .pdf) ** TARKISTA, KORJAA **

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi013.tex

Ratkaisu:
pdf-muodossa
Maple worksheet,mw-tiedosto
Matlab m-tiedosto
Matlab pdf-tiedosto

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1, Diffint1,max/min, ääriarvot,peruskurssi1, MatlabDiffint1, MathematicaDiffint1

mplDi014 (ent. mplDi011)
Ohjelmat: Maple,Mathematica
Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

mplDi011.pdf (pdf-tiedosto),
mplDi011.mw (Maple ws)
...

Luokittelu:
`mplteht/mplDiffint/mplDi011.tex`, `mmateht/mmaDiffint/mmaDi107.tex`

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi014.tex

Ratkaisu:
pdf-muodossa
Maple worksheet,mw-tiedosto
(Mma-notebook)

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1,mplIntegraali1 Pinta-ala, integraali,diffintperusteet,perusku

mplDi015
Määritä ellipsin $9x^2 + 16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi015.tex

Ratkaisu:
pdf-muodossa
Maple worksheet,mw-tiedosto

Avainsanat: MapleDiffint1, mplDifferentiaali1, aariarvot,ääriarvot peruskurssi1,diffintperusteet

---

70. Ratkaise yhtälö $2x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 1 = 0$.

Vihje: Maplen funktio `solve`.

71. Määritä polynomin

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

nollakohdat ja paikalliset minimit ja maksimit. Piirrä kuva.

Suorita sekä Maplella että Matlabilla.

Vihje: Maplella voit yrittää 3. asteen yhtälön ratkaisua myös symbolisesti `solve`-komennolla. Numeerisesti `fsolve`.

Matlabilla vain numeerisesti: `roots`.
Polynomin derivaatta: `polyder`

72. Maple tai Matlab Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7:n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`
Matlab: `roots`

mplDi019.tex
Tarkastellaan funktiota (normeerausta vaille normaalijakauman kertymäfunktiota)

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Laske sopivaa 0:ssa kehitettyä Taylorin polynomia (jota usein kutsutaan MacLaurinin polynomiksi) ja jäännöstermiä käyttäen likiarvo luvulle $\mathrm{erf}(1)$ siten, että $|virhe| \leq 0.005$.

Maple tuntee funktion erf. Laske Maplella todellinen virhe tällä termien määrällä ja vertaa jäännöstermiarviolla saamaasi ylärajaan.

Piirrä erf-funktion ja ao. Taylorin polynomin kuvaajat ja myös niiden erotus (jotta erottuvat) välillä $[0,1]$

Vihje: Käytä joko `taylor` tai `series`-komentoa. Huomaa, että kumpikin palauttaa potenssisarjatietorakenteen, jossa on $O(h)$-termi. Itse polynomi saadaan komennolla
`convert(sarja,polynom)`

Huomaa, että yo. komentojen n tarkoittaa jäännöstermin astelukua (jota useimmiten merkitään Taylor-kaavoissa $(n+1)$:llä).
Huomaa lisäksi, että parilliset potenssit puuttuvat (miksi?). Siten esim. 7- ja 8-asteisten polynomien virheen aseteluku $= 9$ (eli $T_7 = T_8$). Tässä virhetermissä esiintyvän 9. derivaatan itseisarvon maksimi nähdään vaikka piirtämällä ja laskemalla ko. derivaatta kuvasta näkyvässä pisteessä.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi019.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi019R.pdf
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi019R.mw

Avainsanat: Maplediffint1,mplDiffint1, Taylorin polynomi, Taylor polyno mial, erf

Maplefunktioita: diff, taylor, convert(sarjalauseke, polynom), series

---

mplDi020
Tehtävä tai pari Lambertin funktiosta

Vaativuus: 1-3
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDixxx.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDixxxR.m

Avainsanat: Maplediffint1,mplDiffint1,...

Maplefunktioita:

---

mplDi022
Wilkinsonin polynomi

Vaativuus: 1-3
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffint1/mplDi022.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffint1/ratkaisut/mplDi022R.m

Avainsanat: Maplediffint1,mplDiffint1,Wilkinsonin polynomi, polynomin nollakohdat, häiriöalttius, hairioalttius, ill-conditioned polynomial roots

Maplefunktioita:

---

mplteht/mplDiffintV, vektoridiff-int, Maple

Tässä luvussa on tehtäviä usean muuttujan (vektorimuuttujan) differentiaali- ja integraalilaskentaan Maple-ohjelmalla. (Sopivat yhtä hyvin Mathematicalle ja vastaaville.) Ohjeet, ratkaisut, aputyöarkit ym. on tässä tehty Maplelle/Maplella.

---

mplDiV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. Alla olevasta“tehtävä”-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Taylorin polynomit

Kahden muuttujan Taylorin polynomi kehitettynä pisteesä p voidaan kirjoittaa:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(p)$$

Tästä on helppo arvata, miten useamman muuttujan polynomi rakentuu.

Erityisesti 2. asteen Taylorin kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(p+h) = f(p) + h^T \nabla f(p) + \frac{1}{2} h^T H_f(p) h + R_2(h),$$

joka pätee n:n muuttujan funktiolle sellaisenaan. Tässä jäännöstermi $R_2(h) = ||h||^3 O(h)$. (Eli riittävän pienessä p:n ystössä pätee: $R_2(h) \leq M||h||^3$ jollain vakiolla M.)

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T Ax$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.

Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös *symmetrisestä matriisista A*.

Suunnattu derivaatta ja gradientti

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\vec{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

Pinnan normaali ja tangenttitaso

Jos pinnan yhtälö esitetään muodossa $F(x, y, z) = 0$, saadaan edellisen perusteella pinnan tangenttitason yhtälö pisteessä p_0 näin:

$\nabla F(p_0)\dot{(}p - p_0) = 0$

Jos pinta on annettu muodossa $z = f(x, y)$, saadaan siten normaalin suunta funktion $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ gradienttina.

Tästä seuraa, että pisteeseen p_0 asetetun tangenttitason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 = f_1(p_0)(x - x_0) + f_2(p_0)(y - y_0).$$

($f_1$ja f_2 tarkoittavat osittaisderivaattoja.)

Kahden pinnan leikkauskäyrän tangentti

Leikkauskäyrän tangentti on kohtisuorassa molempien pintojen normaalia vastaan (eikö vain!). Siten leikkauskäyrän tangentin suuntainen vektori saadaan pinnan normaalivektorien ristitulona $\vec{t} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

Kriittiset pisteet, ääriarvot

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä.
Symmetrisen matriisin definiittisyyskäytös selvitetään ominaisarvojen avulla. Jos matriisi on $2 \rtimes 2$, voidaan käyttää determinanttia (kts. tehtävä mplV006a). Isommillekin matriiseille on determinanttiehtoja, mutta ne on hankala muistaa ja käyttää, jääkööt muistoksi "determinanttien kulta-ajoilta".

Maple-ohjeita

Vektorikenttä ja gradientti

```
with(linalg): with(plots):
fieldplot(grad(f(x,y),[x,y]),x=a..b, y=c..d,arrows=slim,color=x);
# a:lla, b:lla jne. oltava tietysti numeeriset arvot.
```

Uusissa Maplen versioissa on kirjastopakkaus `VectorCalculus` ja siellä funktio `Gradient` lukuisine valitsimineen. Kts. helppi. Vanhan `linalg`-kirjaston kunnon `grad` on perustarpeisiin ehkä yksinkertaisin ja helppokäyttöisin.

Oma pikku funktio on usein selkein, se voidaan määritellä ongelmakohtaisesti esim. toimimaan vain 2d-tilanteessa. Tällainen gradienttifunktio voitaisin kaikessa yksinkertaisuudessaan määritellä näin: `gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`

Pintapiirroksen "valaiseminen" esim. avaruuskäyrillä

Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
 with(plots):
  f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
  x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
  pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
# HUOM! html:ssa edellinen nakyy vaarin, pitaa olla:
# pystyleikkaus:=spacecurve(Aaltoauki[x,y,f(x,y)],[x,y,0]Aaltokii,r=0..2,...)
# missa Aalto tarkoittaa aaltosulkua,
  x:='x':y:='y':  # Kannattaa muistaa vapauttaa.
  pinta:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2):
  display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour,transparency=0.5);
```

“Tehtävän” Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV000.tex

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot

---

73. mplV001.tex
Piirrä seuraavien funktioiden tasa-arvokäyrät:

a) $x^3 - xy^3$

b) $\sin(x) cosh(y)$

c) $\cos^2(x)\cosh(y)$

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots)`).

mplDiV0011.tex

Mitkä ovat seuraavien funktioiden luonnolliset määrittelyjoukot:

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, b) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ c) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

Piirrä (ensin käsin ja sitten Maplella) tasoon kunkin määrittelyjoukon kuva. Mitä topologisia ominaisuuksia joukoilla on? (*avoin, suljettu, rajoitettu, yhtenäinen, joukon reuna*, jne.)

Muodosta näiden funktioiden korkeuskäyrien (tasa-arvokäyrien) yhtälöt. Muodosta myös pystyleikkauskäyrät tasojen $x = 1$ ja $y = 1$ kanssa kussakin tapauksessa. Hahmottele käsin ja piirrä Maplella.

Vihje Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots)`). Lisää Maple-ohjeita 1. “tehtävässä” mplDiV000.tex.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV0011.tex

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot

---

mplDiV0012.tex
Onko seuraavilla funktioilla raja-arvo, kun $(x,y) \to (0,0)$:

$$\text{a)}\ \frac{x}{|x|+|y|} \qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{|x|+|y|}$$

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje:
Tasa-arvokäyriin: `contourplot` (ensin `with(plots)`), pintoihin: `plot3d`
Lisää Maple-ohjeita alussa “tehtävässä” mplDiV000.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV0012.tex

Ratkaisu:

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot, korkeuskäyrät, pintapiirros

Maplefunktioita: plots[contourplot], plot3d

---

mplDiV0013.tex
Olkoon $f : \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinaista raja-arvoa ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio on jatkuva ja missä taas ei?

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje: Kulje erityisesti O:sta alkavaa nousevaa sädettä (kulmakerroin posit.) 1. neljänneksessä kulkien sitä alaspäin kohti origoa. Mitä tapahtuu lopulta, kun ollaan riittävän lähellä O:a?

Piirrä kuvaaja funktion rajoittumasta mielivaltaiselle origon kautta kulkevalle suoralle; tutki tätä varten, missä pisteissä ko. suora leikkaa paraabelit $y = x^2$ ja $y = 2x^2$. Funktio on epäjatkuva näillä paraabeleilla.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV0013.tex

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot

---

74. mplV0014.tex

(a) Muodosta funktion $\ln(1+e^{x^2y^3z})$ 1. kertaluvun osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen.

(b) Osoita, että funktio $\arctan\frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

Vihje: Laske ainakin joku käsin ja tarkista kaikki Maplella. Tällaiset mekaaniset, tarkkuutta vaativat tehtävät ovat onnen omiaan CAS-ohjelmille, kuten Maple, Mathematica. Maplen `diff` hoitelee homman.

mplDiV0015.tex

(a) (Sama kuin mplV0014-tehtävän b-kohta)
Osoita, että funktio $\arctan\frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

(b) Oletetaan, että funktioilla $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

(c) Olkoon $f(x,y)=x^3y^2+x^4\sin y+\cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

Vihje:
Sopii sekä käsinlaskuun että Maplelle. Maple olettaa säännöllisyyttä tarpeeksi, jotta sekaderivaatat yhtyvät. Käyttäjän on tiedettävä, mitä pitää olettaa.

Mapletekniikkaa: b) Kirjoita CR-yhtälöt tyyliin
`diff(u(x,y),x)=diff(v(x,y),y)`
Maplen diff-operattorin täytyy tietää, että lauseke, johon derivointi kohdistuu, sisältää muuttujat x ja y. Muussa tapauksessa se räväyttää ilman muuta tuloksen 0 (nolla), joka on samalla tehtävän suorituksen arvo.

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV0015.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV0015R.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV0015R.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot, osittaisderivaatta, Laplacen yhtälö, Cauhy-Riemannin yhtälöt, harmoniset funktiot, sekaderivaattojen yhtyminen

---

75. mplV0016.tex
Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

Voit antaa Maplen laskea.

76. mplV0017.tex
Laske yhdistetyn funktion derivoimissääntöä (eli ketjusääntöä, "chain rule") käyttäen $\frac{\partial w}{\partial s}$ ja $\frac{\partial w}{\partial t}$, kun

(a) $w = x\ln(x^2 + y^2)$, $\quad x = s + t, y = s - t$,
(b) $w = e^{x+2y} \sin(2x - y)$, $\quad x = s^2 + t^2$, $\quad y = 2s^2 - t^2$

Tee käsin ja tarkista Maplella.

77. mplV0018.tex
Kolmionmuotoisen maa-alan kahden sivun mitatut pituudet ovat 224 m ja 158 m ja niiden välinen kulma 64° . Pituusmittauksen virheraja on 0.4 m ja kulman 2° . Mikä on pinta-alan likimääräinen suhteellinen maksimivirhe.

Vast: n. 2 %

mplDiV0019.tex
Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$

.

Olkoon $f(x,y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x,y) = k, k = 1, 2, 3.$
(b) Piirrä f:n gradienttikenttävektoreita `fieldplot`:n avulla samaan kuvaan korkeuskäyräpiirrosten kanssa. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje:
Gradientti voidaan ladata useastakin kirjastosta. Selvintä on määritellä itse:

```
gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]
```

(Voit myös ladata: `with(linalg);` ja saat käyttöön funktion `grad`)

`with(plots)` lataa `contourplot`- ja `fieldplot`-funktiot.
Grafiikkojen yhdistäminen:

```
kuva1:=contourplot(...)
kuva2:=fieldplot(...)
display(kuva1,kuva2);
```

78. mplV00191.tex
Työarkilla `../MattieT/mplteht/ohjeet/pintoja.mw (ja .pdf)` kohdassa "toinen esimerkki"tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Sekä plot3d- että contourplot-kuvat ovat lievästi sanoen harhaisia. (Toki erilaisilla optioilla voi plot3d-kuvaa olennaisesti parantaa.) Selvitä, minkälainen kuvaaja todellisuudessa on. Tarvitset taas sekä Maplea että kynää ja paperia. Piirtele myös pystyleikkauksia, oikeita korkeuskäyriä ym. ***

Hm, tämä on parasta muuttaa tehtäväksi (tai esimerkiksi), ratkaisu on suoraan tuolla, ja uudemmat versiot ovat poistaneet harhat.

***

Vihje: Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki (sama kuin alussa ohjetiedostossa mplV000.tex), jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
 with(plots):
  f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
  x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
  pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
# HUOM! html:ssa edellinen nakyy vaarin, pitaa olla:
# pystyleikkaus:=spacecurve(Aaltoauki[x,y,f(x,y)],[x,y,0]Aaltokii,r=0..2,...)
# missa Aalto tarkoittaa aaltosulkua,
  x:='x':y:='y':  # Kannattaa muistaa vapauttaa.
  pinta:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2):
  display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour,transparency=0.5);
  display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkkaa leikkauskayraa.
```

79. mplV00192.tex

Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x, y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplepiirroksin:
Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

b. Muodosta funktion $h(x, y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Vihje: Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

mplDiV0019a.tex

Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^{\nvDash} \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3.$
(b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x, y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

mplDiV003.tex
Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

Vihje: Käyrä on luontevinta kirjoittaa listaksi `r = [cos(t)/t,sin(t)/t,arctan(t)]` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

80. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

mplDiV006.tex
Lausu neliömuodon $q(x) = x^T Ax$ definiittisyydet symmetrisen matriisin A ominaisarvojen (merkkien) avulla.

(Määritelmä tehtäväpaperin lopussa (jos opettaja sijoitti), TÄSSÄ: Kokoelman alussa, teht. mplDiV000.)

Vihje Lausu neliömuoto pääakselikoordinaattien y_i avulla, sitten voit lukea kuin avointa kirjaa. (Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV006.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV006R.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV006R.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot, (pos/neg/semi)definiitit matriisit, ominaisarvot

---

mplDiV006a.tex
(Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)
Osoita 2×2 symmetrisen matriisin A tapauksessa, että matriisi on

- definiitti (pos. tai neg.), jos ja vain jos $\det(A) > 0$,
- indefiniitti, jos ja vain jos $\det(A) < 0$,
- semidefiniitti, jos ja vain jos $det(A) = 0$

Vihje:
Kirjoita

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ja muodosta karakteristinen polynomi. Käytä hyväksesi toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. (Jos et muista, niin kerro auki $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.)

Ratkaisu: mplV006aR.pdf ja .mw (html:ssa *ratkaisu*-linkki)

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV006a.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV006aR.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV006aR.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot, (pos/neg/semi)definiitti matriisi,karakteristinen polynomi

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra);alias(IdM = IdentityMatrix, Det = Determinant):

---

81. mplV006b.tex
Määritä seuraavien neliömuotojen matriisit sekä definiittisyys:

(a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$
(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
(c) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_4^2 - 4x_2x_3$

Esitä neliömuodot pääakselikoordinaateissa. Ei ole pahitteeksi, vaikka piirrät joitakin kuvia.

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenvalues,1mplVektori

82. mplV006c.tex
Mitä kartioleikkausta edustaa yhtälö $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$

Muunna yhtälö pääakselimuotoon ja piirrä kuva. (Voit ottaa mallia `KRE` Exa 6 s. 396 "Transformation to principal axes".)

tai GRE 11.6 s. 589 Voit myös katsoa: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/harj/tyo/heigen.h`

Muista: Hyperbelin luonteva parametriesitys on $x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t$

Maple-ohjeita: harj6ohje.mws -TODO!-

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenvalues,1mplVektori

83. TV-yhtiö on (pahaa aavistamatta) palkannut matemaatikon seikkailukilpailun juontajaksi. Kilpailussa tehtävänä on kiertää mahdollisimman lyhyt reitti sen kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0),(2,0)$ ja $(0,2)$. Lähtö tapahtuu pisteestä $(1,0)$, ja kilpailijan tarvitsee koskettaa jokaista muuta kolmion sivua ja palata sitten alkupisteeseen Määritä lyhin tällainen reitti, ja sen pituus.

Vihje: Muodosta matkan funktio $f(x,y)$ – mieti ensin, mitä kuvaa x ja mitä y, ja sen jälkeen, kuinka etäisyys laskettaisiin (vihje: Euklidinen etäisyys). Tämän jälkeen etsi funktion f kriittiset pisteet, eli osittaisderivaattojen nollakohdat, ja tutki niiden laatua. Valitse näistä pisteistä minimin tuottava, ja laske pituus.

mplDiV010.tex
Määritä funktion $f(x,y)=\frac{1}{2+x-2y}$ astetta 2 oleva Taylorin polynomi kehitettynä pisteessä $(2,1)$ Tee 2. asteen polynomi ensin käsin ja sitten Maplella. Kts. myös ohjetiedostoa (tulee).

Vihje:

http://math.aalto.fi/teaching/v/2/02/L/mtaylor.html Usean muuttujan Taylorin polynomeja Maple-avusteisesti (Luentomateriaalia v2/2002)

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV010.tex

Ratkaisu: (Samalla työarkilla myös mplDiV011R)
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV010R.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV010R.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot,Taylorin 2:n muuttujan polynomi

Maplefunktioita: diff, D

---

mplDiV011.tex

(a) Muodosta funktion $f(x,y)=\cos(x+\sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi kehitettynä $(0,0)$:ssa. Miten hyvän approksimaaton saat arvolle $f(0.1,-0.2)$? (Vertaa laskimen tai Maplen antamaan arvoon, ei tarvitse miettiä jäännöstermiarviota.)

(b) Määritä funktion $f(x,y)=\frac{1}{2+x-2y}$ asteita 2,3 ja 4 olevat Taylorin polynomit kehitettynä pisteessä $(2,1)$ (vrt. mplDiV010)

(c) Piirrä funktio $f(x,y)$ ja eriasteisia Taylorin polynomeja pintapiirrokisna ja/tai korkeuskäyrinä.

Vihje:
a)-kohta on käsinlasku, tarkistukseen siinäkin Maplen *diff*.
b)-kohta Maplen *diff*-funktiolla.
Lopuksi voit kokeilla myös *mtaylor*-komentoa. (Tarkoitus on Maple-avusteinen oppiminen, ei liian valmiiden "nappuloiden" paineleminen.)

Pohjatietoa: http://math.aalto.fi/teaching/v/2/02/L/mtaylor.html Usean muuttujan Taylorin polynomeja Maple-avusteisesti (Luentomateriaalia v2/2002)

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV011.tex

Ratkaisu: (Samalla työarkilla myös mplDiV010R)
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV011R.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV011R.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot,Taylorin 2:n muuttujan polynomi,Usean muuttujan Taylorin polynomi

Maplefunktioita: diff, D, mtaylor, plot3d, contour

---

mplDiV012.tex
Määritä funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/-satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pistet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

84. mplV013.tex
Määritä funktion

$$f(x, y) = \cos x + \cos y$$

kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});`

mplDiV013a.tex
Määritä funktion

$$f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$$

suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$.

Maplen lisäksi kannattaa kokeilla Matlab:lla `meshgrid, max/min, find ...`-tekniikkaa. Toki ihan optimointiin räätälöityjä funktioitakin kummallakin ohjelmalla. Mutta ensisijaisesti ihan perustekniikoita, please!. (Osoittautuu sitäpaitsi, että `minimize`-tyyppiset "mustat laatikot" eivät oikein pärjää joka kohdassa.)

Jatkotehtävä: Määritä kaikki kriittiset pisteet yo. alueessa ja niiden luonne (max/min/satula).

Vihje Vaatimattomasta ulkoasustaan huolimatta voi olla hiukan työläs, mutta sitäkin opettavaisempi.
Jatkotehtävässä esiintyy ehkä yllättävääkin käytöstä.

Vaativuus: 3+ (Perusteellinen suoritus vie paljon aikaa.)
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV013a.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV013aR.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV013aR.mw (Maple-worksheet)

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot

---

mplDiV014.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)

Vihje:
Sopii puhtaasti käsinlaskuun, toki saa käyttää Maplea laskuapualaisena.
Joskus `solve` palauttaa `RootOf`-muotoisia lausekkeita. Kannattaa yrittää niiden sieventämistä `allvalues`-komennolla. (Tässä tehtävässä toimii, tosin ihminen osaa tässä tapauksessa nopeamminkin "solvata" ilman apuneuvoja.)

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDiffintV/mplDiV014.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV014R.pdf
../mplteht/mplDiffintV/ratkaisut/mplDiV014R.mw

Avainsanat: mplDiffintV, Maple:Usean muuttujan funktioiden diff-ja intlaskentaa, vektorimuuttujan funktiot,minimointi,optimointi, osittaiderivaatta, nollakohta.

---

85. mplV016.tex
Määritä funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

86. mplV017.tex

a. Olkoon $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä $(2,-1)$. Piirrä pinta ja tangenttitaso ja pyörittele ja zoomaa.

b. Sama pinnalle $z = \arctan\frac{y}{x}$ pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.

Vihje: (Kts. ..H/harj6ohje.mws) -TODO-
Avainsanat: 1mplVektori,1tangenttitaso,1tangent1plane,1several1variables

87. mplV018.tex
Määritä lieriöiden

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$

leikkauskäyrän pisteen $(1,-1,1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

Edellinen voisi näyttää tältä:

```
plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
```

Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

```
display(kuva1,kuva2);
```

Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x,y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

88. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

mplteht/mplDiffintV, vektoridiff-int, Maple

Tässä luvussa on tehtäviä usean muuttujan (vektorimuuttujan) differentiaali- ja integraalilaskentaan Maple-ohjelmalla. (Sopivat yhtä hyvin Mathematicalle ja vastaaville.) Ohjeet, ratkaisut, aputyöarkit ym. on tässä tehty Maplelle/Maplella.

---

89. mplDi0002.tex
Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3.$
(b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x, y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje:

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

90. mplDi0004.tex

Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x, y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplelepiirroksin:
Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

b. Muodosta funktion $h(x, y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Vihje: Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

91. mplDi0005.tex

Määritä lieriöiden

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$

leikkauskäyrän pisteen $(1, -1, 1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

Edellinen voisi näyttää tältä:

```
plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
```

Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

```
display(kuva1,kuva2);
```

Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x, y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

92. mplDi0006.tex

a. Olkoon $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä $(2,-1)$. Piirrä pinta ja tangenttitaso ja pyörittele ja zoomaa.

b. Sama pinnalle $z = \arctan\frac{y}{x}$ pisteessä $(2,2,\pi/4)$.

93. Piirrä seuraavien funktioiden tasa-arvokäyrät:

a) $x^3 - xy^3$

b) $\sin(x)cosh(y)$

c) $\cos^2(x)\cosh(y)$

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot`.

94. Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

Vihje: Käyrä on luontevinta kirjoittaa vektoriksi `r = {Cos[t]/t,Sin[t]/t,ArcTan[t]}` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

95. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

96. TV-yhtiö on (pahaa aavistamatta) palkannut matemaatikon seikkailukilpailun juontajaksi. Kilpailussa tehtävänä on kiertää mahdollisimman lyhyt reitti sen kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0), (2,0)$ ja $(0,2)$. Lähtö tapahtuu pisteestä $(1,0)$, ja kilpailijan tarvitsee koskettaa jokaista muuta kolmion sivua ja palata sitten alkupisteeseen Määritä lyhin tällainen reitti, ja sen pituus.

Vihje: Muodosta matkan funktio $f(x,y)$ – mieti ensin, mitä kuvaa x ja mitä y, ja sen jälkeen, kuinka etäisyys laskettaisiin (vihje: Euklidinen etäisyys). Tämän jälkeen etsi funktion f kriittiset pisteet, eli osittaisderivaattojen nollakohdat, ja tutki niiden laatua. Valitse näistä pisteistä minimin tuottava, ja laske pituus.

97. mplV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. “Tehtävä”-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Taylorin polynomit

Kahden muuttujan Taylorin polynomi kehitettynä pisteesä p voidaan kirjoittaa:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(p)$$

Tästä on helppo arvata, miten useamman muuttujan polynomi rakentuu.

Erityisesti 2. asteen Taylorin kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(p+h) = f(p) + h^T \nabla f(p) + \frac{1}{2} h^T H_f(p) h + R_2(h),$$

joka pätee n:n muuttujan funktiolle sellaisenaan. Tässä jäännöstermi $R_2(h) = ||h||^3 O(h)$. (Eli riittävän pienessä p:n ystössä pätee: $R_2(h) \leq M||h||^3$ jollain vakiolla M.)

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T A x$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.

Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös *symmetrisestä matriisista A*.

Suunnattu derivaatta ja gradientti

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\mathbf{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

98. mplV0001.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)
(Käytä Maplea sydämesi kyyllydestä, vaikka käsinlaskullakin selviäisit.)

99. DokuT mplV0009.tex
"Pikku projekti"
Määritä funktion

$$f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$$

suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$.

Maplen lisäksi kannattaa kokeilla Matlab:lla `meshgrid, max/min, find ...`-tekniikkaa. Toki ihan optimointiin räätälöityjä funktioitakin kummallakin ohjelmalla. Mutta ensisijaisesti ihan perustekniikoita, please!.

Vihje: Vaatimattomasta ulkoasustaan huolimatta voi olla hiukan työläs.

100. mplV011.tex

a) Muodosta funktion $f(x, y) = \cos(x + \sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi kehitettynä $(0, 0)$:ssa. Miten hyvän approksimaaton saat arvolle $f(0.1, -0.2)$? (Vertaa Maplen antamaan tarkkaan likiarvoon, ei tarvitse miettiä jäännöstermiarviota.)

b) Määritä funktion $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$ asteita 2,3 ja 4 olevat Taylorin polynomit kehitettynä pisteessä $(2, 1)$

b) Piirrä funktio $f(x, y)$ ja eriasteisia Taylorin polynomeja pintapiirrokisna ja/tai korkeuskäyrinä.

Kts. myös harj7ohje.mws

Avainsanat: Usean muuttujan Taylorin polynomi, diff, mtaylor,plot3d,contour.

Vihje: a)-kohta on käsinlasku, tarkistukseen siinäkin Maplen *diff.* b)-kohta Maplen *diff*-funktiolla. Lopuksi voit kokeilla myös *mtaylor*-komentoa. (Tarkoitus on Maple-avusteinen oppiminen, ei liian valmiiden "nappuloiden" paineleminen.)

Ratkaisut tehtäviin mplV010 ja mplV011: "ratkaisut"-linkistä (molemmat samassa työarkissa).

101. mplV012.tex
Määritä funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pistet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

102. mplDi005.tex
Maple, Mathematica , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

Suorita b)-kohta sekä Maplella että Matlab:lla (Toki voit kokeilla Matlab:lla myös a)-kohtaa tyyliin `syms x` ja sitten Maple-komento `int`.)

Vihje:

Mathematica:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla `NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

Maple:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Numeerisessa sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.
Esim: `evalf(Int(f, x = 0 .. 2, digits = 20, method = _Dexp))`

Matlab:
Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi "function handle"). Sitten quad-alkuiset Matlab-funktiot.

Viitteet:

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/m-files.html` (Matlab:n funktiokahva, function handle)

-e

mplSarjat

Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

Summa lasketaan komennolla `sum`

mplFS03 (Maple Mathematica, Matlab)

Määritä seuraavat summat:

$$\sum_{k=1}^{1000} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Maple: Kokeile edelliseen sekä `sum` että `add` - komentoja, jälkimmäiseen vain `sum`.

Matlab: Muodosta vektori `1,2,...1000` ja sitten vain `sum`. Jälkimmäisessä voit laskea muutamalla, toinen toistaan suuremmalla arvolla. (Numeerisesti et tietenkään voi summata äärettömyyksiin.)

---

mplFS05

Määritä symboliset summat:

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Vihje Maple-funktio `sum`
(Symbolinen summaus on integraalifunktion määrittämistä vastaava diskreetti tehtävä, usein jopa vaikeampi.)

-e

mplGrafiikka

103. Tiedosto: mplG001.tex
Piirrä funktion $f(x) = sin(8x) + sin(9x)$ kuvaaja.

Vihje: Tarkastele riittävän pitkää väliä

104. mplG002.tex

a.) Suorita `plot(1/x,x=-1..1);` Miten saisit kuvan näyttämään paremmalta?

b.) Kokeile datan piirtoa tähän tapaan

```
h:=0.01: xy=seq([k*h,1/(k*h)],k=1..100);
 plot([xy])
```

(Data annettu xy-pisteiden listana.)

c.) ja myös:

```
x:=[seq(k*h,k=1..100)]: y:=map(z->1/z,x);
plot(x,y)
```

(Matlab-tyylinen datan piirto (uusissa Maple-versioissa.))

d.) Kokeile nyt sitä Matlab-piirtoa vertailuksi viimeksi mainittuun:

```
h=0.01; x=h:h:1;
plot(x,1./x)
```

Vihje: a)-kohtaan:
(`?plot,options`). Etsi `options`-luettelosta `discont=true-` kohta. Kokeile myös, mitä `discont(1/x,x);` vastaa.

105. mplG009.tex

Kun suoritat komennon `with(plots):` saat käyttöösi mm. funktiot `contourplot` ja `implicitplot`.

Kokeile vaikkapa `contourplot(x^2+y^2,x=-5..5,y=-5..5)` ja `implicitplot(x^2+y^2=1,x=-1..1,y=-1..1)`

Piirrä funktion $f(x,y) = y\ln x + x\ln y$ korkeuskäyriä pisteen $(1,1)$ ympäristössä. Piirrä erityisesti se, joka kulkee pisteen $(1,1)$ kautta.

Klikkaa hiirellä kuvaa ja etsi käyrältä piste, joka on lähellä pistettä $(1,1)$. Seuraa pisteen koordinaatteja työkalunauhan vasemmasta laatikosta.

106. [Matlab,Maple,Mathematica] (Vihjeet ja ratkaisut tässä vain Matlab/Maple.)

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros funktiosta

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje:

1) **Matlab**
Käyttäjän täytyy itse muodostaa koordinaattihila ja sen pisteissä korkeusarvomatriisi Z. Tämä hoituu "teho-operaattorilla"`meshgrid`, johon kannattaa panostaa muutenkin.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, niin kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin **mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...** Kokeile myös *colorbar* yms.

Matlabilla korkeuskäyriin *contour* , voit myös kokeilla *ezcontour*-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, *clabel.*

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

2) **Maple:**
Helpompaa, koska hila tehdään ohjelman toimesta. Tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja "context sensitive").

```
with(plots):
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

Luokittelu:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
Avainsanat:
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

107. [Matlab,Maple,Mathematica] (Vihjeet ja ratkaisut tässä vain Matlab/Maple.)

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros funktiosta

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje:

1) **Matlab**
Käyttäjän täytyy itse muodostaa koordinaattihila ja sen pisteissä korkeusarvomatriisi Z. Tämä hoituu "teho-operaattorilla"**meshgrid**, johon kannattaa panostaa muutenkin.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, niin kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin **mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...** Kokeile myös *colorbar* yms.

Matlabilla korkeuskäyriin *contour* , voit myös kokeilla *ezcontour*-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, *clabel.*

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

2) **Maple:**
Helpompaa, koska hila tehdään ohjelman toimesta. Tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja “context sensitive”).

```
with(plots):
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

Luokittelu:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
Avainsanat:
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

108. mplGxx.tex, mlGxx.tex (H2T6.tex)
Matlab,Maple,Mathematica

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros.

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje: Tutustu samalla `Matlabin meshgrid`:n toimintaan.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
>> x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, kirjoitettaisiin:
`Z=X.^2 - Y.^2;`

Pintoihin `mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...` Kokeile myös `colorbar` yms.

Matlabilla korkeuskäyriin `contour` , voit myös kokeilla `ezcontour`-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, `clabel`.

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

Maple: Helpompaa, mutta tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja "context sensitive").

```
> with(plots):
> plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
> contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

Luokittelu:
`mplteht/mplGrafiikka/mplGxx.tex`, `matlabteht/mlGrafiikka/mlGxx.tex`
Avainsanat:
3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat

-e

mplGrafiikka

Tiedosto: mplGr001.tex
Piirrä funktion $f(x) = sin(8x) + sin(9x)$ kuvaaja.

Vihje: Tarkastele riittävän pitkää väliä

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplGraphics/mplGr001.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplGraphics/ratkaisut/mplGr001R.pdf
../mplteht/mplGraphics/ratkaisut/mplGr001R.mw

Avainsanat: Maplegrafiikkaa, plot, mplGraphics, mplGr, Maplepiirto, kuvat, figure

Maplefunktioita: plot

---

mplGr002.tex

(a) Suorita `plot(1/x,x=-1..1);` Miten saisit kuvan näyttämään paremmalta?

(b) Kokeile datan piirtoa tähän tapaan

```
h:=0.01: xy=seq([k*h,1/(k*h)],k=1..100);
 plot([xy])
```

(Data annettu xy-pisteiden listana.)

(c) ja myös:

```
x:=[seq(k*h,k=1..100)]: y:=map(z->1/z,x);
plot(x,y)
```

(Matlab-tyylinen datan piirto (uusissa Maple-versioissa.))

(d) Kokeile nyt sitä Matlab-piirtoa vertailuksi viimeksi mainittuun:

```
h=0.01; x=h:h:1;
plot(x,1./x)
```

Vihje: a)-kohtaan:
(`?plot,options`). Etsi `options`-luettelosta `discont=true-` kohta. Kokeile myös, mitä `discont(1/x,x);` vastaa.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplGraphics/mplGr002.tex

Avainsanat: Maplegrafiikkaa, plot, mplGraphics, mplGr, Maplepiirto, kuvat

Maplefunktioita: plot,options

---

mplGr009.tex

Kun suoritat komennon `with(plots):` saat käyttöösi mm. funktiot `contourplot` ja `implicitplot`.

Kokeile vaikkapa `contourplot(x^2+y^2,x=-5..5,y=-5..5)` ja
`implicitplot(x^2+y^2=1,x=-1..1,y=-1..1)`

Piirrä funktion $f(x,y) = y\ln x + x\ln y$ korkeuskäyriä pisteen $(1,1)$ ympäristössä. Piirrä erityisesti se, joka kulkee pisteen $(1,1)$ kautta.

Klikkaa hiirellä kuvaa ja etsi käyrältä piste, joka on lähellä pistettä $(1,1)$. Seuraa pisteen koordinaatteja työkalunauhan vasemmasta laatikosta.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplGraphics/mplGr009.tex

Avainsanat: Maplegrafiikkaa, plot, mplGraphics, mplGr, Maplepiirto, kuvat, figure

Maplefunktioita: with(plots), plot, plot3d, contourplot, implicitplot

---

mplGr010.tex [mlGxx.tex (H2T6.tex)]

[Matlab,Maple,Mathematica] (Vihjeet ja ratkaisut tässä vain Matlab/Maple.)

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros funktiosta

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje:

1) **Matlab**
Käyttäjän täytyy itse muodostaa koordinaattihila ja sen pisteissä korkeusarvomatriisi Z. Tämä hoituu "teho-operaattorilla"`meshgrid`, johon kannattaa panostaa muutenkin.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, niin kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin **mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...** Kokeile myös *colorbar* yms.

Matlabilla korkeuskäyriin *contour* , voit myös kokeilla *ezcontour*-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, *clabel.*

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

2) **Maple:**
Helpompaa, koska hila tehdään ohjelman toimesta. Tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja "context sensitive").

```
with(plots):
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplGraphics/mplGr010.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplGraphics/ratkaisut/mplGr010R.pdf
../mplteht/mplGraphics/ratkaisut/mplGr010R.mw
Matlab-ratkaisu:
http://math.aalto.fi/ apiola/matlab/opas/lyhyt/ratkaisuja/html/H3teht4.html

Avainsanat: Maplegrafiikkaa, 3D-grafiikka, pinta, pinnat, korkeuskäyrät, korkeuskayrat, mplGraphics, mplGr, Maplepiirto, kuvat, surface

Maplefunktioita: with(plots), plot3d,contourplot

-e

mplIntegraalimuunnos

109. mplI001.tex

Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset ja ilmoita muunnosfunktion määrittelyalue.
Saat hyödyntää Maplea integroinneissa, mutta kirjoita kuitenkin ainakin jokunen osittaisintegrointikaava ensin käsin. Rajankäynnit tulee päätellä ilman Maplea.

a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

c) $f(t) = \cos at$ d) $f(t) = \sin at$

Vihje:

Luokittelu:

Avainsanat:

Ratkaisu:

Viitteet:

110. mplI002.tex

Laske Laplace-muunnokset (samaan tyyliin kuin edellä).

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, 2] \\ 0, & t \notin [1, 2] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Vihje: `[HAM] ss. ...`

Luokittelu:

Avainsanat:

Ratkaisu:

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

-e

mplIntegraalimuunnos

111. mplI001.tex

Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset ja ilmoita muunnosfunktion määrittelyalue.
Saat hyödyntää Maplea integroinneissa, mutta kirjoita kuitenkin ainakin jokunen osittaisintegrointikaava ensin käsin. Rajankäynnit tulee päätellä ilman Maplea.

a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

c) $f(t) = \cos at$ d) $f(t) = \sin at$

Vihje:

Luokittelu:

Avainsanat:

Ratkaisu:

Viitteet:

112. mplI002.tex

Laske Laplace-muunnokset (samaan tyyliin kuin edellä).

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Vihje: `[HAM] ss. ...`

Luokittelu:

Avainsanat:

Ratkaisu:

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

mplIntT001.tex

Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset ja ilmoita muunnosfunktion määrittelyalue.
Saat hyödyntää Maplea integroinneissa, mutta kirjoita kuitenkin ainakin jokunen osittaisintegrointikaava ensin käsin. Rajankäynnit tulee päätellä ilman Maplea.

a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

c) $f(t) = \cos at$ d) $f(t) = \sin at$

Vaativuus:

Avainsanat:

Viitteet:

---

mplIntT002.tex

Laske Laplace-muunnokset (samaan tyyliin kuin edellä).

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

`[HAM] ss. ...`

Vaativuus: 1

Avainsanat:

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

-e

mplKompleksi

113. mplK001.tex
Maple-ohjeita muutamaan seuraavaan tehtävään

```
plot, seq, map, subs, with(plots), complexplot, plot3d
```

seuraavassa x**plot**y tarkoittaa mitä tahansa piirtofunktiota.

```
with(plots):        # Ladataan lisägrafiikkakirjasto
kuva1:=xploty(...): # Kuvan tallettaminen muuttujaan.
kuva2:=xploty(...): #  ... ja toinen.
display(kuva1,kuva2);  # Näin yhdistetään grafiikkoja.

F:=2*x+exp(x*y); # Lausekkeen arvo muuttuu, kun x ja y muuttuvat.
             # MUTTA:  F(x,y) tai F(a,b) on vailla mieltä!
             # Jos halutaan laskea F:n arvo, kun x=a, y=b, komennetaan:
subs(x=a,y=b,F);

f:=(x,y)-> 2*x+exp(x*y);  # Funktiomääritys.
f(a,b)   # toimii nyt.
```

Lisää tähän omia ohjeitasi/poista tarpeettomia!

Avainsanat: Maple-ohjeita, mapleohjeet.

114. mplK002.tex
Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

Vihje: Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

Avainsanat: Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

115. mplK003.tex
Käsinlasku
Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman α verran. Tämähän on vanha C1-tuttu olio, tason $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha}z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$

Pieni ("vapaaehtoinen") jatko-osa:

Tästä on helppo yleistää mielivaltaisella kompleksiluvulla $Re^{i\alpha}$ kertomiseen. Miten kuvausta voi sanoin kuvailla ?

Avainsanat: Kompleksiluvut, tason kiertokuvaus.

116. mplK004.tex

Ykkösen n:nsien juurien käsittelyä varten määrittele Maple-funktio

```
w:=(k,n)->exp(I*2*k*Pi/n);
```

Piirrä yksikköympyrä ja kaikki $\sqrt[n]{1}$:t joillakin n:n arvoilla.

Laadi sitten Maple-skripti, jolla voidaan laskea ja piirtää syötteenä annetun mielivaltaisen kompleksiluvun kaikki n:nnet juuret.

```
> z:=2+3*I : n:=10:   % Muuteltava syöterivi
> juuret:=seq(w(k,n),k=0..n-1);
> ? complexplot
```

Huomaa, että $e^{i\Theta}$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ "piirtää" yksikköympyrän. `complexplot` on juuri reaalimuuttujan kompleksiplotti.

Kts. tarkemmin
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/H/complex6.html`

Tässä pikatietoisku kompleksiluvuista:

`http://www.math.hut.fi/opetus/Mattie/Mattie0/Luentomatskua/kompleksianalyysi/kompluvut.html`

Avainsanat: Kompleksiluvut, ykkösen juuret, complexplot

117. mplK002.tex

Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$,$\cos 4\varphi$ ja $\sin 5\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n avulla.

Vihje: Sopii käsinlaskuksi, mutta voidaan hyödyntää myös Maplea.

Avainsanat: Kompleksiluvut, De Moivre'n kaava, trigonometriset yhtälöt.

mplLineaarialgebra

mplLA000.tex

Matriisit Maplessa

Komennolla
`with(LinearAlgebra)`
ladataan laaja lineaarialgebran kirasto. Maplessa on myös vanhempi `linalg`. Joissakin yhteyksissä tarvitaan myös tätä.

- Matriisin
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$$
voi syöttää joko vaakavektoreita päällekkäin latomalla:
$$A:=<<a|b|c>,<d|e|f>>$$
tai pystyvektoreita vierekkäin:
$$A:=<<a,d>\,|\,<b,e>\,|\,<c,f>>\,.$$

Ohjetiedoston Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA000.tex

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA001.tex
Ratkaise yhtälöryhmä
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},$$
kun
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-13&-13&-2&7\\18&-4&30&-1&-12\\-23&3&7&15&7\\9&36&-1&14&16\\3&28&7&14&5\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-196\\435\\11\\111\\195\end{bmatrix}$$
Vihje: Matriisin
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$$
voi syöttää joko vaakavektoreita päällekkäin latomalla:
$$A:=<<a|b|c>,<d|e|f>>$$
tai pystyvektoreita vierekkäin:
$$A:=<<a,d>\,|\,<b,e>\,|\,<c,f>>\,.$$

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA001.tex

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA002.tex
Muodosta Maplessa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Määrittele aliakset vihjeen mukaan.

(b) Muodosta karakteristinen polynomi suoraan määritelmän mukaan hyödyntäen aliaksia *Det,Id*.
(c) Muodosta karakteristinen polynomi LinearAlgebra-kirjaston `CharacteristicMatrix` ja `Determinant`-komentojen avulla.
(d) Sovella `factor`-komentoa polynomiin (sattuu onnistumaan), ja ratkaise puuttuvat juuret `solve`-komennolla.
e) Näppäise hiirellä matriisia A ja paina oikeaa painiketta. Valitse Eigenvalues, ja voit kokeilla muitakin.

Vihje: Lataa kirjasto ja määrittele alias-nimet pitkille nimille:

```
> with(LinearAlgebra)
> alias(Det=Determinant,chmat=CharacteristicMatrix,Id=IdentityMatrix)
```

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA002.tex

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA, ominaisarvot,ominaisvektorit
polynomi

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector, Eigenvalues,Eigenvectors

---

mplLA003.tex
Tutustu tähän: http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/L/LA.html, voit ottaa vastaavan `.mw`:n pohjaksi. Kirjoita viitteen http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/00/L/G-J.html Maple-työ `LinearAlgebra`-tyylillä, `LA.mw/html`:n mallin mukaisesti. Tarkista rivioperaatiot `ref-` ja `rref-`aliaksia käyttäen. Selvitä ratkaisujen "lukumäärä" (olemassaolo ja mahd. vapaiden parametrien määrä). Tarkista lopuksi komennolla `LinearSolve`.

Vihje: Maplessa on kaksi lineaarialgebrakirjastoa: vanhempi linalg ja uudempi LinearAlgebra. Tässä tehtävässä opetellaan uudemman käyttöä (se on mm. matriisien osien käsittelyn kannalta selkeämpää, selvästi Matlab-vaikutteista). Samalla opitaan/kerrataan oikeaa asiaa liittyen lineaaristen yhtälösysteemien perusoppiin.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA003.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA003R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA003R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA, matriisien muodostaminen, Gaussin eliminointi

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA004.tex
Nyt emme enää harjoittele rivioperaatioilla laskemista, vaan kaikissa on lupa käyttää `ref/rref`-aliasoituja funktioita.

Määritä kanta $\mathbb{R}^5$:n aliavaruudelle, jonka virittävät vektorit $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v_3} = (0, -1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v_4} = (1, 4, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v_5} = (0, 0, 2, 1, 3)$.

Jos Aatu saa tulokseksi jotkin vektorit ja Öhky saa jotkin toiset (saman määrän sentään toivottavasti), niin miten selvität, kumpi on oikeassa vai kenties kumpikin?

Vihje:

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA004.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA004R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA004R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA,kanta,basis,lineaarinen riippuvuus/mattomuus, viritys

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector, alias(ref=GaussianE

---

mplLA005.tex
Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ja merkitään sarakevektoreita $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_5}$. Olkoon $B = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}]$.

(a) Selvitä, miksi $\mathbf{a_3}$ ja $\mathbf{a_5}$ kuuluvat B:n sarakeavaruuteen col(B).
(b) Määritä nolla-avaruuden N(A) kanta.
(c) Olkoon $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^4$ A:n määräämä lineaarikuvaus, ts. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (ts. $T = L_A$). Selvitä, miksi T ei ole injektio eikä surjektio.

Vihje

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA005.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA005R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA005R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA, sarakeavaruus, nolla-avaruus, columnspace, nullspace

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector,alias(ref=GaussianEl

---

mplLA006.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

(a) Määritä sarakeavaruuden kanta.
(b) Määritä riviavaruuden kanta.
(c) Määritä nolla-avaruuden (ytimen) dimensio.
(d) Tarkista dimensioita koskevan peruslauseen toteutuminen.

Vihje

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

Sopii myös käsinlaskuun.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA006.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA006R.pdf

../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA006R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA,kanta, dimensio, riviavaruus, sarakeavaruus, nolla-avaruus

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector, alias(ref=GaussianE

---

mplLA007.tex

(a) Olkoon A $m \times n$-matriisi ja $Ab = [A \;\; \mathbf{b}]$ liitännäismatriisi. Lausu (välttämätön ja riittävä) ehto rangien $r(A)$ ja $r(Ab)$ avulla sille, että yhtälösysteemillä $Ax = b$ olisi ratkaisu(ja) (eli on konsistentti).

(b) Osoita, että $m \times n$-matriisille A pätee $r(A) + n(A^T) = m$

Vihje: Puhdas käsinlasku.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA007.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA007R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA007R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA008.tex

(a) Osoita, että monomit $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ovat `LRT` $\mathbb{R}$:ssä (ts. määrittelyjoukkona koko $\mathbb{R}$) .
(b) Osoita, että ne ovat `LRT` myös jos määritelyjoukkona on mikä tahansa väli $[a, b]$.

(Tietysti riittää tehdä pelkkä (b), niinhän.)

Tapoja on monia: (a)-kohdassa vektoriyhtälö voidaan derivoida toistuvasti ja laskea 0:ssa. Tai voidaan käyttää LRV-lemmaa ja todeta raja-arvokäytöksen perusteella, että x^k ei voi yhtyä alemmanasteiseen polynomiin.

(b)-kohta hoituu ainakin polynomien tekijöihinjaolla (ei haittaa, vaikka tulee kompleksilukuja mukaan). Eräs tapa olisi osoittaa, että ns. Vandermonden matriisi on aina kääntyvä (sarakkeet LRT). (Toisaalta tämä tulee sivutuotteena, jos käytämme jotain muuta tapaa.) Kyseessä on matriisi, joka saadaan, kun monomit $1, x, \ldots x^n$ lasketaan $n+1$:ssä pisteessä $x_0, \ldots, x_n$ (Pisteet

vaakasuuntaan, potenssit pystysuuntaan.) Maplen `LinearAlgebra`:ssa on `VandermondeMatrix`
.

(c) Piirrä monomien kuvaajia vaikkapa välillä $[-1, 1]$ ja yritä nähdä kuvasta lineaarinen riippumattomuus. Piirrä monomeja isoilla peräkkäisillä parillisilla (tai parittomilla) n:n arvoilla ja totea "melkein LRV". Tämä ilmenee numeerisessa laskennassa esim. interpolaatiopolynomin tapauksessa "häiriöalttiutena".

Lyhenteet:
Lineaarisesti riippumaton: `LRT`
Lineaarisesti riippuva:`LRV`

Vihje: Puhdas käsinlasku, paitsi c)-kohta.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA008.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA008R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA008R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA,monomien lineaarinen riippumattomuus, monomit

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA009.tex
Matriisin N sarakkeet ovat koordinaatteja, jotka rajaavat ison N-kirjaimen.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

Piirrä ensin tuo N.

Sovella N:ään lineaarikuvausta, jonka matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tämä on tyyppiä "leikkaus", "shear". Piirrä tulos.

Skaalaa sen jälkeen x-koordinaatit kertomalla luvulla 0.75 ja piirrä taas.

Vapaaehtoinen lisäys. Pyörittele N:ää "keskipisteen"ympäri siirtämällä keskipiste ensin O:oon ja kertomalla sopivalla kiertomatriisilla ja siirtämällä lopuksi takaisin.

Vihje: Ohje piirtoon: Nykyisin voidaan piirtää datapisteitä (yhdysjanoineen) Matlab-tyylisesti(kin) näin: `> plot(v1,v2);`
Matriisin M rivi k : `M[k,1..-1]`
(Vrt. Matlab: M(k,:))
Vanhempi tapa: Piirrettävä data pisteiden listana:

```
> convert(Transpose(N),listlist); plot(%);
```

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA009.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA009R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA009R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA010.tex
(Kynä-paperitehtävä)
Tarkastellaan lämmönjohtumista ohuessa metallilevyssä. Oletetaan, että johtumista tapahtuu vain levyn suunnassa, ja levyn reunoilla on annetut (ajan suhteen) vakiolämpötilat. Levyn lämpötilat eri pisteissä asettuvat ajan kuluessa arvoihin, jotka ovat ajan suhteen vakioita, tällöin puhutaan lämpötilajakauman tasapainotilasta ("steady state"). Tehtävänä on määrittää lämpötilajakauma levyssä tasapainotilan vallitessa.

Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta: (Klikkaa oikealla olevaa pdf-linkkiä, niin kuva näkyy kunnolla.)

```
  --- 20----20---20----
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*---40
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*----40
 |    |     |     |    |
  ----20----20----20---
```

Kuvassa näkyvät annetut vakioreunalämpötilat (reunaehdot). Tehtävänä on laskea ratkaisuapproksimaatiot *:llä merkityissä sisäsolmupisteissä käyttäen seuraavaa periaatetta: Lämpötila levyn solmupisteessä on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo.

Jos indeksoidaan solmupisteiden lämpötilat vaakarivijärjestyksessä: $T_1, \ldots T_6$, voidaan ryhtyä kirjoittamaan yhtälöitä tyyliin:

$T_1 = \frac{20+10+T_4+T_2}{4}, \ldots.$

Kirjoita koko 6×6- yhtälösysteemi "standardimuodossa".
Huom: Tasapainotilaratkaisu saadaan ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 T = 0$ ratkaisuna. Tässä esitettyyn likimääräismenettelyyn ns. *differenssimenetelmään*

Ratkaisua pyydetään seuraavassa tehtävässä.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA010.tex

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA011.tex
Ratkaise edellisen (mplLA010) tehtävän yhtälösysteemi Maplea (tai Matlabia) käyttäen. (Tässä Maple-ohjeet.) Muodosta sitten edellisen tehtävän kuvan mukainen 4×5 matriisi, jossa on annetut reunalämpötilat sekä lasketut sisälämpötilat oikeilla kohdillaan. Ota nurkkapisteiden lämpötiloiksi kahden naapurisolmun lämpötilojen keskiarvo. Piirrä kuva, pyörittele hiirellä.

Vihje: Tehtävässä riittää käytellä LinearAlgebra-kirjaston funktiota `LinearSolve`.

Ratkaisuvektorin muokkaaminen matriisiksi onnistuu mukavasti, kun leikkaat/liimaat alla olevan funktiomäärityksen Maple-työarkillasi. (Suorita leikkaus pdf-tehtävätiedostosta.)

```
Reshape:=(vek,m,n)->Matrix(linalg[matrix](m,n,convert(vek,list)));
```

Funktio on tehty vastaamaan Matlabin funktion reshape käytöstä siinä tapauksessa, jossa vektori muutetaan annetun kokoiseksi matriisiksi.

Lämpötilamatriisin rakentelu kannattaa hoidella (Matlabinomaiseen) tyyliin:

```
Tsisa:=Reshape(T,2,3); # vektorissa T on ratkaisulampotilat.
Tiso:=Matrix(4,5,0);
vaaka:=<15|20|20|20|30>;
pysty:=...;
Tiso[2..3,2..4]:=Tsisa;
...
```

Piirtäminen komennolla `matrixplot` (muista with(plots):)

```
matrixplot(Tiso,axes=boxed);
```

Pyörittele kuvaa hiirellä.

Huom: Sanomattakin on selvää, että tehtävä sopii erikoisen hyvin Matlab:lle. Tässä pikemminkin näytetään, että Maplen LinearAlgebra-työkaluilla voidaan matkia Matlab-työtapaa ja päästä lähelle samaa käsittelymukavuutta.

Lisätehtävä: Tee ratkaisu Matlabilla!

Palataan asiaan perusteellisemmin Matlab-tehtävien yhteydessä, jolloin käsitellään lähemmin differenssimenetelmää.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA011.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA011R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA011R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA012.tex
Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\}$.

Suorita Maple-komennot:

```
> cos(2*t): %=expand(%);
...
> cos(6*t): %=expand(%);
```

Olkoon $H = \mathrm{sp}(\mathcal{B})$. Osoita, että $\mathcal{B}$ on H:n kanta. (Tämä on miltei pelkkä toteamus, sehän palautuu monomien `LRT`- ominaisuuteen.) Varsinainen tehtävä:

Kirjoita $\mathcal{C}$:n vektorien $\mathcal{B}$-koordinaattivektorit (käyttäen hyväksi edellä viitatun Maple-istunnon tuloksia) ja osoita niiden avulla, että $\mathcal{C}$ on `LRT` ja siis H:n kanta.

Vihje: Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA012.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA012R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA012R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

mplLA013.tex
Lay: Linear Algebra s. 277 teht. 17

Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\} = \{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\} = \{\mathbf{y_0}, \ldots, \mathbf{y_6}\}$, kuten edellä (teht. mplLA012).

Edellä osoitettiin, että myös $\mathcal{C}$ on avaruuden $H = \mathrm{sp}\{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ kanta.

(a) Muodosta $P = \Big[[\mathbf{y_0}]_{\mathcal{B}} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [\mathbf{y_6}]_{\mathcal{B}}\Big]$, ja laske P^{-1}.

(b) Selitä, miksi P^{-1}:n sarakkeet ovat vektorien $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}$ $\mathcal{C}$-koordinaattivektoreita. Kirjoita sitten trigonometrisiä kaavoja, joilla $\cos t$:n potensseja voidaan lausua moninkertaisten kulmien kosinien avulla. Esimerkkinä sopivasta kaavasta olkoon: $5\cos^3 t - 6\cos^4 t + 5\cos^5 t - 12\cos^6 t$.

Tällainen esitysmuoto on mm. integroinnin kannalta erityisen hyödyllinen, kuten varmasti tiedät.

Vihje: Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplLinalg/mplLA013.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA013R.pdf
../mplteht/mplLinalg/ratkaisut/mplLA013R.mw

Avainsanat: Lineaarialgebraa Maplella, matriisilaskentaa,mplLinalg,mplLA

Maplefunktioita: with(LinearAlgebra); with(linalg); Matrix, matrix, Vector, vector

---

-e

mplLineaarialgebra

118. mplV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. “Tehtävä”-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Ominaisarvot ja -vektorit

Laskeminen

- Muodosta *karakteristinen polynomi* $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ja määritä sen 0-kohdat, näin saat *ominaisarvot*.
- Ratkaise kutakin ominaisarvoa λ kohti lineaarinen yhtälösysteemi $(A-\lambda I)x = 0$. Ratkaisu sisältää ainakin yhden vapaasti valittavan parametrin (muussa tapauksessa teit virheen λ:n laskennassa). Ratkaisuvektorit x ovat ominaisvektoreita. (Triviaalia nollavektoria ei kelpuuteta tähän kastiin.)
- “Oikeassa elämässä” ominaisvektorit lasketaan numeerisesti ja sitten ominaisarvot. Numeerinen laskenta on oma alansa, johon ei tässä paneuduta, vaan käytetään ohjelmistojen tarjoamia valmiita funktioita “mustina laatikkoina”.

Yleisiä ominaisominaisuuksia

- Kaksinkertaisen ominaisarvon tapauksessa voi olla yksi tai kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.
- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat LRT.
- Symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaaliset.

Matriisin diagonalisointi

Jos $n \times n$- matriisilla on n LRT ominaisvektoria, niin se on diagonalisoituva. Diagonalisointi (jos mahdollista) tarkoittaa matriisien X, D ja X^{-1} määrittämistä siten, että $A = XDX^{-1}$.

Käsin laskettaessa pitäisi osata kääntää 2×2-matriisi. Annetaan Maplen tehdä se yleisessä symbolisessa muodossa (ja generoida LaTeX-muotoon), käytä hyväksesi:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{-ad+bc} & \frac{b}{-ad+bc} \\ \frac{c}{-ad+bc} & -\frac{a}{-ad+bc} \end{bmatrix}$$

Lineaarikuvaus

Matriisi määrää lineaarikuvauksen (ja kääntäen). Tason tapauksessa siis 2×2-matriisi. Tehtävässä 6 on tarkoitus vain ottaa yleinen tason vektori (x, y), laskea sen kuva ao. matriisilla kerrottaessa, havainnollistaa piirroksella ja keksiä kuvaava

119. mplLi001.tex
Ratkaise yhtälöryhmä

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -13 & -13 & -2 & 7 \\ 18 & -4 & 30 & -1 & -12 \\ -23 & 3 & 7 & 15 & 7 \\ 9 & 36 & -1 & 14 & 16 \\ 3 & 28 & 7 & 14 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -196 \\ 435 \\ 11 \\ 111 \\ 195 \end{bmatrix}$$

Vihje: Matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

voi syöttää joko vaakavektoreita päällekkäin latomalla:

$$A :=<< a|b|c >, < d|e|f >>$$

tai pystyvektoeita vierekkäin:

$$A :=<< a, d > | < b, e > | < c, f >> .$$

120. mplLi002.tex
Muodosta Maplessa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Määrittele aliakset vihjeen mukaan.

(b) Muodosta karakteristinen polynomi suoraan määritelmän mukaan hyödyntäen aliaksia *Det,Id*.
(c) Muodosta karakteristinen polynomi LinearAlgebra-kirjaston `CharacteristicMatrix` ja `Determinant`-komentojen avulla.
(d) Sovella `factor`-komentoa polynomiin (sattuu onnistumaan), ja ratkaise puuttuvat juuret `solve`-komennolla.
e) Näppäise hiirellä matriisia A ja paina oikeaa painiketta. Valitse Eigenvalues, ja voit kokeilla muitakin.

Vihje: Lataa kirjasto ja määrittele alias-nimet pitkille nimille:

```
> with(LinearAlgebra)
> alias(Det=Determinant,chmat=CharacteristicMatrix,Id=IdentityMatrix)
```

121. mplLi003.tex

Tutustu tähän: `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/L/LA.html`, voit ottaa vastaavan `.mws`:n pohjaksi. Kirjoita viitteen `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/00/L/G-J.html` Maple-työ `LinaerAlgebra`-tyylillä, `LA.mws/html`:n mallin mukaisesti. Tarkista rivioperaatiot `ref-` ja `rref`-aliaksia käyttäen. Selvitä ratkaisujen "lukumäärä" (olemassaolo ja mahd. vapaiden parametrien määrä). Tarkista lopuksi komennolla `LinearSolve`.

Vihje: Maplessa on kaksi lineaarialgebrakirjastoa: vanhempi linalg ja uudempi LinearAlgebra. Tässä tehtävässä opetellaan uudemman käyttöä (se on mm. matriisien osien käsittelyn kannalta selkeämpää, selvästi Matlab-vaikutteista). Samalla opitaan/kerrataan oikeaa asiaa liittyen lineaaristen yhtälösysteemien perusoppiin.

122. mplLi004.tex

Nyt emme enää harjoittele rivioperaatioilla laskemista, vaan kaikissa on lupa käyttää `ref/rref`-aliasoituja funktioita.

Määritä kanta $\mathbb{R}^5$:n aliavaruudelle, jonka virittävät vektorit $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (0, 2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v_3} = (0, -1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{v_4} = (1, 4, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v_5} = (0, 0, 2, 1, 3)$.

Jos Aatu saa tulokseksi jotkin vektorit ja Öhky saa jotkin toiset (saman määrän sentään toivottavasti), niin miten selvität, kumpi on oikeassa vai kenties kumpikin?

Vihje:

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

123. mplLi005.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ja merkitään sarakevektoreita $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_5}$. Olkoon $B = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_4}]$.

(a) Selvitä, miksi $\mathbf{a_3}$ ja $\mathbf{a_5}$ kuuluvat B:n sarakeavaruuteen col(B).
(b) Määritä nolla-avaruuden N(A) kanta.
(c) Olkoon $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^4$ A:n määräämä lineaarikuvaus, ts. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ (ts. $T = L_A$). Selvitä, miksi T ei ole injektio eikä surjektio.

Vihje:

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

124. mplLi006.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

(a) Määritä sarakeavaruuden kanta.
(b) Määritä riviavaruuden kanta.
(c) Määritä nolla-avaruuden (ytimen) dimensio.
(d) Tarkista dimensioita koskevan peruslauseen toteutuminen.

Vihje:

```
with(LinearAlgebra)
alias(ref=GaussianElimination,rref=ReducedRowEchelonForm)
```

125. mplLi007.tex

(a) Olkoon A $m \times n$-matriisi ja $Ab = [A\mathbf{b}]$ liitännäismatriisi. Lausu (välttämätön ja riittävä) ehto rangien $r(A)$ ja $r(Ab)$ avulla sille, että yhtälösysteemillä $Ax = b$ olisi ratkaisu(ja) (eli on konsistentti).

(b) Osoita, että $m \times n$-matriisille A pätee $r(A) + n(A^T) = m$

Vihje: Puhdas käsinlasku.

126. mplLi008.tex

(a) Osoita, että monomit $1, x, x^2, \dots, x^n$ ovat `LRT` $\mathbb{R}$:ssä. (b) Osoita, että ne ovat `LRT` myös jos määritelyjoukkona on mikä tahansa väli $[a, b]$.

(Tietysti riittää tehdä pelkkä (b), niinhän.)

Tapoja on monia: (a)-kohdassa vektoriyhtälö voidaan derivoida toistuvasti ja laskea 0:ssa. Tai voidaan käyttää LRV-lemmaa ja todeta raja-arvokäytöksen perusteella, että x^k ei voi yhtyä alemmanasteiseen polynomiin.

(b)-kohta hoituu ainakin polynomien tekijöihinjaolla (ei haittaa, vaikka tulee kompleksilukuja mukaan). Eräs tapa olisi osoittaa, että ns. Vandermonden matriisi on aina kääntyvä (sarakkeet LRT). (Toisaalta tämä tulee sivutuotteena, jos käytämme jotain muuta tapaa.) Kyseessä on matriisi, joka saadaan, kun monomit $1, x, \dots x^n$ lasketaan $n+1$:ssä pisteessä $x_0, \dots, x_n$ (Pisteet vaakasuuntaan, potenssit pystysuuntaan.) Maplen `LinearAlgebra`:ssa on `VandermondeMatrix` .

(c) Piirrä monomien kuvaajia vaikkapa välillä $[-1, 1]$ ja yritä nähdä kuvasta lineaarinen riippumattomuus. Piirrä monomeja isoilla peräkkäisillä parillisilla (tai parittomilla) n:n arvoilla ja totea "melkein LRV". Tämä ilmenee numeerisessa laskennassa esim. interpolaatiopolynomin tapauksessa "häiriöalttiutena".

Vihje: Puhdas käsinlasku, paitsi c)-kohta.

127. mplLi009.tex
Matriisin N sarakkeet ovat koordinaatteja, jotka rajaavat ison N-kirjaimen.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

Piirrä ensin tuo N.

Sovella N:ään lineaarikuvausta, jonka matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tämä on tyyppiä "leikkaus", "shear". Piirrä tulos.

Skaalaa sen jälkeen x-koordinaatit kertomalla luvulla 0.75 ja piirrä taas.

Vapaaehtoinen lisäys. Pyörittele N:ää "keskipisteen"ympäri siirtämällä keskipiste ensin O:oon ja kertomalla sopivalla kiertomatriisilla ja siirtämällä lopuksi takaisin.

Vihje: Ohje piirtoon: Nykyisin voidaan piirtää datapisteitä (yhdysjanoineen) Matlab-tyylisesti(kin) näin: `> plot(v1,v2);`
Matriisin M rivi k : `M[k,1..-1]`
(Vrt. Matlab: M(k,:))
Vanhempi tapa: Piirrettävä data pisteiden listana:

```
> convert(Transpose(N),listlist); plot(%);
```

128. mplLi010.tex

(Kynä-paperitehtävä)

Tarkastellaan lämmönjohtumista ohuessa metallilevyssä. Oletetaan, että johtumista tapahtuu vain levyn suunnassa, ja levyn reunoilla on annetut (ajan suhteen) vakiolämpötilat. Levyn lämpötilat eri pisteissä asettuvat ajan kuluessa arvoihin, jotka ovat ajan suhteen vakioita, tällöin puhutaan lämpötilajakauman tasapainotilasta ("steady state"). Tehtävänä on määrittää lämpötilajakauma levyssä tasapainotilan vallitessa.

Tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta: (Klikkaa oikealla olevaa pdf-linkkiä, niin kuva näkyy kunnolla.)

```
  --- 20----20---20----
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*---40
 |    |     |     |    |
10----*-----*-----*----40
 |    |     |     |    |
  ----20----20----20---
```

Kuvassa näkyvät annetut vakioreunalämpötilat (reunaehdot). Tehtävänä on laskea ratkaisuapproksimaatiot *:llä merkityissä sisäsolmupisteissä käyttäen seuraavaa periaatetta: Lämpötila levyn solmupisteessä on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo.

Jos indeksoidaan solmupisteiden lämpötilat vaakarivijärjestyksessä: $T_1, \ldots T_6$, voidaan ryhtyä kirjoittamaan yhtälöitä tyyliin:

$T_1 = \frac{20+10+T_4+T_2}{4}, \ldots.$

Kirjoita koko 6×6- yhtälösysteemi "standardimuodossa".
Huom: Tasapainotilaratkaisu saadaan ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 T = 0$ ratkaisuna. Tässä esitettyyn likimääräismenettelyyn ns. *differenssimenetelmään*

Ratkaisua pyydetään seuraavassa tehtävässä.

129. mplLi011.tex

Ratkaise edellisen tehtävän yhtälösysteemi Maplea (tai Matlabia) käyttäen. (Tässä Maple-ohjeet.) Muodosta sitten edellisen tehtävän kuvan mukainen 4×5 matriisi, jossa on annetut reunalämpötilat sekä lasketut sisälämpötilat oikeilla kohdillaan. Ota nurkkapisteiden lämpötiloiksi kahden naapurisolmun lämpötilojen keskiarvo. Piirrä kuva, pyörittele hiirellä.

Vihje: Tehtävässä riittää käytellä LinearAlgebra-kirjaston funktiota `LinearSolve`.

Ratkaisuvektorin muokkaaminen matriisiksi onnistuu mukavasti, kun leikkaat/liimaat alla olevan funktiomäärityksen Maple-työarkillasi. (Suorita leikkaus pdf-tehtävätiedostosta.)

```
Reshape:=(vek,m,n)->Matrix(linalg[matrix](m,n,convert(vek,list)));
```

Funktio on tehty vastaamaan Matlabin funktion reshape käytöstä siinä tapauksessa, jossa vektori muutetaan annetun kokoiseksi matriisiksi.

Lämpötilamatriisin rakentelu kannattaa hoidella (Matlabinomaiseen) tyyliin:

```
Tsisa:=Reshape(T,2,3); # vektorissa T on ratkaisulampotilat.
Tiso:=Matrix(4,5,0);
vaaka:=<15|20|20|20|30>;
pysty:=...;
Tiso[2..3,2..4]:=Tsisa;
...
```

Piirtäminen komennolla `matrixplot` (muista with(plots):)

```
matrixplot(Tiso,axes=boxed);
```

Pyörittele kuvaa hiirellä.

Huom: Sanomattakin on selvää, että tehtävä sopii erikoisen hyvin Matlab:lle. Tässä pikemminkin näytetään, että Maplen LinearAlgebra-työkaluilla voidaan matkia Matlab-työtapaa ja päästä lähelle samaa käsittelymukavuutta.

Lisätehtävä: Tee ratkaisu Matlabilla!

Palataan asiaan perusteellisemmin Matlab-tehtävien yhteydessä, jolloin käsitellään lähemmin differenssimenetelmää.

130. mplLi012.tex

Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\}$.

Suorita Maple-komennot:

```
> cos(2*t): %=expand(%);
...
> cos(6*t): %=expand(%);
```

Olkoon $H = \mathrm{sp}(\mathcal{B})$. Osoita, että $\mathcal{B}$ on H:n kanta. (Tämä on miltei pelkkä toteamus, sehän palautuu monomien `LRT`- ominaisuuteen.) Varsinainen tehtävä:

Kirjoita $\mathcal{C}$:n vektorien $\mathcal{B}$-koordinaattivektorit (käyttäen hyväksi edellä viitatun Maple-istunnon tuloksia) ja osoita niiden avulla, että $\mathcal{C}$ on `LRT` ja siis H:n kanta.

Vihje: Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

131. mplLi013.tex

Lay: Linear Algebra s. 277 teht. 17

Olkoon $\mathcal{B} = \{1, \cos t, \ldots, \cos^6 t\} = \{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ ja $\mathcal{C} = \{1, \cos t, \ldots, \cos 6t\} = \{\mathbf{y_0}, \ldots, \mathbf{y_6}\}$, kuten edellä (teht. mplLi012).

Edellä osoitettiin, että myös $\mathcal{C}$ on avaruuden $H =\mathrm{sp}\{\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}\}$ kanta.

(a) Muodosta $P = \left[[\mathbf{y_0}]_{\mathcal{B}} \quad | \quad \ldots \quad | \quad [\mathbf{y_6}]_{\mathcal{B}} \right]$, ja laske P^{-1}.

(b) Selitä, miksi P^{-1}:n sarakkeet ovat vektorien $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_6}$ $\mathcal{C}$-koordinaattivektoreita. Kirjoita sitten trigonometrisiä kaavoja, joilla $\cos t$:n potensseja voidaan lausua moninkertaisten kulmien kosinien avulla. Esimerkkinä sopivasta kaavasta olkoon: $5\cos^3 t - 6\cos^4 t + 5\cos^5 t - 12\cos^6 t$.

Tällainen esitysmuoto on mm. integroinnin kannalta erityisen hyödyllinen, kuten varmasti tiedät.

Vihje: Merkinnät kirjan Lay Linear Algebra mukaiset.

132. mplLi020.tex

Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ QR - hajotelma ja määritä sen avulla PNS-ratkaisu yhtälölle $Ax = b$, missä $b = [-1, 6, 5, 7]^T$

Mikä on PNS-virhe ("residuaali") $||Ax - b||$?

Kirjoita myös normaaliyhtälöt (mutta ei tarvitse ratkaista).

Vihje: Tämä on käsinlaskuksi tarkoitettu. Ainakin tarkistukseen ja ehkä välivaiheisiin sopii käyttää Maplea (Matlab-puolella - arvaa mitä!)

Huom: PNS-tehtäviä on myös hakemistoissa mlLinis, mplCurveFit mlCurveFit

133. Maple:
Muodosta Maplessa matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Muodosta karakteristinen polynomi LinearAlgebra-kirjaston `CharacteristicMatrix` ja `Determinant`-komentojn avulla.
(b) Sovella `factor`-komentoa polynomiin (sattuu onnistumaan), ja ratkaise puuttuvat juuret `solve`-komennolla.
c) Näppäise hiirellä matriisia A ja paina oikeaa painiketta. Valitse Eigenvalues, ja voit kokeilla muitakin.

Vihje:

134. mplLi030.tex
Laske matriisien A ja B ominaisarvot sekä B:n ominaisvektorit, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Voidaanko matriisien ominaisvektoreista muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta? (A-matriisin tapauksessa ei todellakaan tarvitse tätä johtopäätöstä varten laskea ominaisvektoreita.)

Vihje: Käsinlasku/päättely

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues

135. mplLi031.tex

Matriisilla $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ kertominen kiertää tason vektoreita kulmalla θ. Mieti ensin geometriselta kannalta, voiko tällä olla reaalisia ominaisarvoja jollain/-millään θ:lla.

Laske sitten ominaisarvot ja -vektorit.

Vastaus laskutehtävään: Ominaisarvot: $\cos(\theta) + i\sin(\theta), \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ Ominaisvektorit: $[1, -i], [1, i]$

Vihje: Käsinlasku/päättely, saa kokeilla myös Maple/Matlab/Mathematicalla

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues,1kiertokuvaus,1plane1rotation

136. mplLi032.tex

Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisvektoreista $\mathbb{R}^2$:n kanta ja diagonalisoi matriisi. (eli muodosta matriisit X, D, X^{-1}.)

Vihje: Huomaa, että ominaisarvo saa olla 0, se ei edes estä diagonalisointia. Katso myös mplLi000.tex-ohjeita

Käsinlasku/päättely, saa kokeilla myös Maple/Matlab/Mathematicalla

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues,1kiertokuvaus,1plane1rotation, 1matriisin1diagonalisointi, 1matrix1diagonalization

137. mplLi033.tex

Osoita, että vanha kunnon *Fibonaccin* jono (F_n) saadaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

potensseja muodostamalla.

Diagonalisoi matriisi A, ja laske sen avulla kaava F_n:lle.

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues,1Fibonacci, 1matriisin1diagonalisointi, 1matrix1diagonalization

138. mplLi034.tex

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

(a) Varmista, että näet päältäpäin, että ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta.

(b) Laske ominaisarvot ja -vektorit Maplella käsinlaskutyyliä simuloiden (kts. L/ominaisarvot.mws), saat laskea käsinkin. Tarkista komennolla `Eigenvectors` (`with(LinearAlgebra)`)

(c) Muodosta matriisin A ominaisvektoreista ortonormeerattu kanta $\mathbb{R}^3$:lle. Eli muodosta matriisi X, jonka sarakkeina ovat normeeratut ominaisvektorit.

Vihje: Tarkista ortonormaalisuus kertomalla $X^T X$.
Tarkista, että diagonalisointi meni oikein kertomalla $X^T AX$.

Huom: Vektorin v euklidinen normi Maplella: `norm(v,2);` (Kts. myös `..L/ominaisarvot.mws`)
-TODO-

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues, 1matriisin1diagonalisointi, 1matrix1diagonalization, 1ortonormaai1ominaisvektorikanta, orthonormal1basisof1eigenvectors

139. mplLi035.tex

Spektri tarkoittaa ominaisarvojen joukkoa kompleksitasossa (n pistettä, joista osa saattaa yhtyä, spektraalisäde on $r = max(|\lambda_j|)$ ja spektraaliympyrä siis r-säteinen ympyrä.) Spektri kertoo yleensä paljon matriisin luonteesta.

Tehtävä Piirrä *symmetristen*, *vinosymmetristen* ja *ortogonaalisten* matriisien spektrejä. Lisää kuhunkin myös spektraaliympyrä.

Vihje: Jos A on mielivaltainen matriisi, niin sen avulla voit muodostaa symmetrisen matriisin esim: $A^T A$ tai $A + A^T$, vinosymmetrisen $A^T - A$ Ortogonaalimatriiseja voit kehitellä vaikkapa soveltamalla GramSchmidt-funktiota satunnaismatriisin sarake (tai rivi)vektoreihin. Muista `map`.

Satunnaismatriisin tapauksessa toiminta voisi olla tämäntapaista:

```
> with(LinearAlgebra);
> z2xy:=z->[Re(z),Im(z)]; # Apufunktio, jolla muutetaan x+iy muotoon [x,y] .
> A:=RandomMatrix(20,20): # Hiiren oikea -> ‘‘browse’’ n"aytt"a"a alkiot.
> A:=convert(A,float);  # Jotta siirryt numeeriseen menetelm"a"an...
> lam:=Eigenvalues(A);  #  ... ominaisarvojen laskennassa.
> plot(map(z2xy,[lam]),style=point,symbol=circle);
# Riisu vaikka ensin plot pois, niin n"aet piirrett"av"an rakenteen.
```

Selvitä, vastaavatko kuvat odotuksiasi.

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues,1spektri

140. mplLi036.tex

Viite: Lay s. 340 exa 8, s. 342 exe 27/28, vrt TE Huom 4.1 s. 44

Olkoon $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineaarikuvaus, jonka matriisi luonnollisen kannan suhteen on

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -66 & -44 & -33 \\ 0 & 13 & 21 & -15 \\ 1 & -15 & -21 & 12 \\ 2 & -18 & -22 & 8 \end{bmatrix}.$$

Määritä $\mathbb{R}^4$:n kanta $\mathcal{F}$, jonka suhteen T:n matriisi $[T]_{\mathcal{F}}$ on diagonaalinen ja muodosta tuo diagonaalimatriisi.

Saat käyttää `Eigenvectors`:ia.

Avainsanat: 1mplLinis,1ominaisarvot,1eigenvalues,1matriisin1diagonalisointi, 1diagonalization

mplYhtälöt

mplNLE004 Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella v yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin 10^6 yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku λ Käytä tätä λ:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

Vihje:
Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplNonlinEqu/mplNLE004.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplNonlinEqu/ratkaisut/mplNLE004R.pdf
../mplteht/mplNonlinEqu/ratkaisut/mplNLE004R.mw

Avainsanat: MapleNonlinEqu,mplNonlinEqu, mplNLE, epälineaariset yhtälöt, Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epalineaarinen yhtalo, vaestonkasvumalli.

Maplefunktioita: solve, fsolve

---

mplNLE004 Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella v yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin 10^6 yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku λ Käytä tätä λ:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

Vihje:
Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplNonlinEqu/mplNl004.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplNonlinEqu/ratkaisut/mplNl004R.pdf

../mplteht/mplNonlinEqu/ratkaisut/mplNl004R.mw

Avainsanat: MapleNonlinEqu,mplNonlinEqu, mplNl, epälineaariset yhtälöt, Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epalineaarinen yhtalo, vaestonkasvumalli.

Maplefunktioita: solve, fsolve

---

mplNl006, Fixed point iteration
Tutki funktion $f(x) = a\,x - x^2$ iterointia, kun $a = 3.8$.

Muodosta iteraatiojono $x_0 = 1.5, x_{n+1} = f(x_n), n = 0, \ldots, 50$. Piirrä iteraatiopisteet (n, x_n) (style=point).

Kuvassa pitäisi näkyä kaoottinen käytös.

Muuta alkupisteksi $w_0 = 1.5001$, ja vertaa jonoja. Vertailua on helppo visualisoida erotusten avulla tyyliin:

```
plot([seq([k,w[k]-x[k]],k=0..50)],style=point);
```

Vihje: Maplen for-luuppi toimii tähän tapaan:

```
x[0]:=...
for kk to 10 do       % Oletus: from 1
x[kk] := f(x[kk-1])
end do
```

Yllä olevan kaltaisessa pisteiden piirrossa ei ole muuta vaikeaa kuin sulkujen ymmärtäminen. Kokeile ensin tyyliin:
`[seq([k, x[k]], k = 0 .. 10)]` Tässä näkyy muoto, xy-pisteiden lista, joka kelpaa suoraan plot:n argumentiksi.

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplNonlinEqu/mplNl006.tex

Avainsanat: Epälineeriset yhtälöt, Nonlinear equations, Maple ,mplNonlinEqu,mplNl, iterointi, kiintopiste, fixedpointiteration

Maplefunktioita: fsolve

Differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälöitä Maplella, analyyttisiä ja numeerisia, suuntakenttiä, faasitasoja (grafiikkaa).

---

mplODE000.tex

Maple-ohjeita ja esimerkkejä

1. http://math.aalto.fi/teaching/k3/luentomateriaali/L17.html Suuntakentät, anal. ratk. dsolvella, 2. kertaluvun vakiokert., lineaarinen systeemi.
2. http://math.aalto.fi/teaching/k3/luentomateriaali/lindys1.html Diffyhtälösysteemin ratkaisu Maplella
   http://math.aalto.fi/teaching/k3/luentomateriaali/lindys1.mws Sama Maple mws:nä (lataa Mapleen)
3. http://math.aalto.fi/teaching/k3/luentomateriaali/ Lisää saman kurssin luentolinkkejä (diffyhtälöihin ja muihin).

Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE000.tex

---

mplODE0009.tex
Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
a) Ratkaise differentiaaliyhtälö alkuehdolla $v(0) = 0$.
b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

Vihje: Ohjelma ei osaa laskea raja-arvoa, koska se ei tiedä vakioiden etumerkkiä. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile uudelleen sen jälkeen.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE0009.tex

Ratkaisu:
pdf-muodossa
Maple worksheet,mw-tiedosto

Avainsanat: MatlabDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplDifferentiaali(yhtälöt),... add more ...

---

mplODE001.tex
Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dt} = ty$$

.

(a) Muodosta yleinen ratkaisu.

(b) Määritä vakio `_C1` alkuehdolle $y(0) = 1$.

(c) Ratkaise alkuarvotehtävä suoraan `dsolve`:lla.

Vihje: Maplen funktio `dsolve`.
b)-kohdassa voit ottaa ratkaisulausekkeen `rhs` (Righthand side) kiinni. Tarvitset lisäksi komentoja `subs` ja `solve`
c) `?dsolve`, [HAM] ss. 162-165

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE001.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE001R.mpltxt Maple-teksti

Avainsanat: diffyhtälöt, diffyhtalot, mplODE,dsolve
Maplefunktioita: solve, subs, dsolve

---

mplODE002.tex (infoverkostot (iv) s. 2001)

Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (REh) annettuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:

(a) $y' + y = x^2 - 2$, REh: $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$
(b) $y'' + y = 0$, REh: $y = a\cos x + b\sin x$
(c) $y''' = e^x$,
(d) $x + yy' = 0$, REh: $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$, vakio).

Vihje:
(d)-kohta: Derivoi implisiittisesti, ts. oleta, että on olemassa derivoituva funktio $x \mapsto y(x)$ s.e. $x^2 + y(x) = C$ ja derivoi puolittain. (Tässä tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ tällainen. Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE002.tex

Ratkaisu:
pdf-muodossa
Maple worksheet,mw-tiedosto

Avainsanat: MatlabDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplDifferentiaali(yhtälöt),ratkaisu sijoittamalla yhtaloon, sijoittamalla yhtälöön, implisiittinen derivointi

mplODE0021.tex
Vrt. ... mlODE0021 ja mlODE0022

Totea Maple:n avulla suoraan yhtälöön sijoittamalla , että

$$y(t) = ce^{-5t}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' = -5y$.

Määritä myös diffyhtälön yleinen ratkaisu sekä alkuhdon $y(0) = c$ toteuttava ratkaisu dsolve-komennolla (kts. vihje)

Piirrä ratkaisukäyräparvi, kun vakio c saa 21 arvoa tasavälisesti välillä [0,4]. (Tai suunnilleen tuonverran)

Piirrä paksummalla viivalla alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttava kuvaaja ja merkitse alkupiste rinkulalla.

Vihje:
Huom: Maplen syntaksi muistuttaa läheisesti muPad:ia (Matlabin Symbolic Toolbox). Grafiikoiden yhdistämiseen on Maplessa monipuolisemmat välineet.

Komentoja: `subs,diff,dsolve,plot,with(plots),display`

Differentiaaliyhtälön määrittely:

```
diffyht:=diff(y(t),t) =-5*y(t)
# tai:
diffyht2:=y'(t)=-5*y(t)
```

Näiden käsittely eroaa, edellinen on lauseketyylinen, jälkimmäinen funktiotyylinen, kuten tulostusmuodosta näkyy.
Normaal subs-toimii edellisessä, mutta ei jälkimmäisessä.
Käytä siis alkuosassa edellistä.

Grafiikkojen yhdistäminen yleisesti Maplella hoituu display-komennolla (edellyttää `with(plots)`-komentoa):
`display(kuva1,kuva2,kuva3)`

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE0021.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE0021R.mpltxt (Maple-komennot tekstinä)

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplODE Maplediffyhtälöt,ratkaisukayraparvi, grafiikoiden yhdistäminen, dsolve, display

mplODE003.tex [Matlab-versio: ...mlODE002.tex] (iv3/2001, harj. 1, teht. 2)
Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä (x, y) on $-\frac{4x}{y}$?

Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Ota sitten Maple avuksi. Kokeile ja selitä!

Kts. [HAM] ss. 169-170

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
Suoraparven saat tyyliin

```
> yparvi:=seq(...,c=[-2,-1,-.5,.5,2,1]) # tms.
> isokl:=plot([yparvi],x=...)
```

Yleisemmin isokliinit saadaan piirretyksi *implicitplot*-funktiolla, mutta tässä saatiin ratkaistussa muodossa suoraan.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE003.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE003R.pdf
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE003R.mw

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Maplefunktioita: dsolve,DEplot,display,with(plots),with(DEtools)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

---

mplODE004.tex [Matlab-versio: ...mlODE004.tex] (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 1-2)

Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa = m ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuuskerroin = b. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81 m/s^2$.

Piirrä suuntakenttä.

Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

Maplessa DEtools-kirjaston DEplot-funktiota.
(Matlab-piirroksiin `dfield8`, kts. mlODE004)

Kts. [HAM] ss. 169-170 tai `?DEplot`

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.

(Matlab: dfield-ohje:
Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta http://math.rice.edu/∼dfield/ ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE004.tex

Ratkaisu: ** PUUTTUU, etsi/tee **
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE004R.pdf
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE004R.mw

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella

Maplefunktioita: dsolve, with(DEtools), DEplot, with(plots), display

---

mplODE005.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 2)

Muodosta edellä olevan laskuvarjotehtävän (mplODE004) analyyttinen ratkaisu muuttujien erottelulla. Määritä edellä mainittu (v(0)=10)-ratkaisukäyrä. Tarkista ratkaisu Maplella ja kokeile lopuksi Maplen `dsolve`- komentoa. (Ohje [HAM]-kirjassa.)

Ohje analyyttiseen: Muistathan, että osamurtohajoitelma on hyödyllinen rationaalilausekkeen integroinnissa (Maple: `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);` mutta osattava myös käsin).

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

Vaativuus: 2-
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE005.tex

Ratkaisu: *** PUUTTUU, etsi/tee !! ***

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella,MapleODE, Maplediffyhtälöt, muuttujien erottelu, mplDifferentiaaliyhtälöt
Maplefunktioita: dsolve, convert(lauseke,parfrac)

---

mplODE006.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 3)
Vaihdamme tässä LAODE-tyyliseen notaatioon: t on riippumaton muuttuja, x on "riippuva" muuttuja. Kannattaa totutella eri tyyleihin.

Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$, $x(0) = -1$. Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

Vihje:
Suorita ratkaisu näin:

- Ratkaise ensin vastaava (HY) $x' = \frac{x}{2}$ (yleinen ratkaisu).
- Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yyn).

Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (Maple: DEtools[DEplot], Matlab: `dfield8 tai suuntak1`).
Miten näet suuntakentästä, että yhtälö ei ole autonominen?

Viitteet: `[LAODE]` Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

Vaativuus: 2-

Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE006.tex

Ratkaisu: ** ETSI/TEE **

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella

Maplefunktioita: dsolve, DEtools[Deplot]

---

mplODE007.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 1)
Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi. (Kyseessähän on lineaarinen, mutta ei-vakiokertoiminen yhtälö.)

Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

Piirrä suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktion avulla (kts [HAM] s. 169), voit toki käyttää myös Matlab:n dfield8-funktiota (ohje alla).

Valitse alkuarvoja y_0 väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa y_0, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon y_0:lle.

(Matlab: **dfield-ohje:**
Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta http://math.rice.edu/∼dfield/ ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle. Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`)

Viitteet: `[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE007.tex

Ratkaisu: ** ETSI/TEE **

Avainsanat: MapleDy, mplODE,Maplediffyhtälöt,erf, mplDifferentiaaliyhtälöt, integroiva tekija/tekijä

Maplefunktioita: dsolve,erf,DEtools[DEplot]

---

mplODE008.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 2)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää $xy' = 4y, \quad y(0) = 1.$

(a) Osoita, että tehtävällä ei ole ratkaisua. Osoita, että tämä ei ole ristiriidassa $\exists_1$-lauseen kanssa. (Huom: Lauseen avulla *ei voi todistaa epäeksistenssiä*, koska lauseen ehdot eivä ole välttämättömät.)

(b) Vaihdetaan alkuehdoksi: $y(0) = 0$. Miten nyt on ratkaisujen laita.

(c) Mitä voit sanoa alkuehdon $y(x_0) = y_0$ tapauksessa, jos $x_0 \neq 0$,
(A) suoraan ratkaisukaavan avulla, (B) $\exists_1$-lauseen avulla.

Tämä on puhtaasti "perinteinen" tehtävä, mutta havainnollistus Maple/Matlab-välineillä on hyvinkin paikallaan.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE008.tex

Ratkaisu: ** Ei ole **

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, eksistenssilause, mplDifferentiaaliyhtälöt

---

mplODE009.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 3)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonon muutama termi (AA)-tehtäville

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$

Määritä myös tarkka ratkaisu.

LV-tehtävässä palataan asiaan Maple-hommana. Tämä on tyypillistä symbolilaskennan vahvuusaluetta.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE009.tex

Ratkaisu: ** EI vielä, etsi/tee **

Aputiedostoja,viitteitä
../mplteht/mplODE/apusrc/PicardF.pdf Apu- ja esimerkkityöarkki oppilaille (pdf)
../mplteht/mplODE/apusrc/PicardF.mw Sama Maplen mw-tiedostona:

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplODE

---

mplODE010.tex (iv3/2001, harj. 2, LV teht. 1)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonoa pitemmälle kuin AV-tehtävässä samoille (AA)-tehtäville (a), (b), (c) ja lisäksi vielä (d): lle.

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (d) $y' = 3\frac{y}{x}$

Laske myös tarkka ratkaisu Maplella ja piirrä se ja iteraatiojonon funktioita. (Jos tuntuu liian pitkältä, niin jätä yksi pois, hyvä olis saada kaikki yhteisesti katetuksi (vaikka parityöskentelyssä sopimalla).

*** Prosessoi nämä ***
Malli: Aputiedostossa mplODE010apu.zip on `L4Picard.mw`,`L4Picard.pdf`,`L4exa2.mw`, `L4exa2.pdf`, kts. myös [HAM] ss. 162–165 (`dsolve`)ja s. 126 *Picard–Lindelöf*

Avainsanat: diffyhtälöt, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplODE(yhtälöt)
Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE010.tex

Aputiedostoja,viitteitä
../mplteht/mplODE/apusrc/PicardF.pdf Apu- ja esimerkkityöarkki oppilaille (pdf)
../mplteht/mplODE/apusrc/PicardF.mw Sama Maplen mw-tiedostona:

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplODE

---

mplODE011.tex

(a) Sovella *Picardin* iteraatiota (tuttuakin tutumpaan) (AA)-tehtävään
$y' = y, \quad y(0) = 1$. Osoita, että iteraatiojono lähestyy ratkaisufunktiota $y(x) = e^x$.

(b) (Olkoon vaihteeksi $x(t)$.)
Olkoon alkuarvotehtävänä edelleen $x' = x, \quad x(0) = 1$.
Osoita, että jos lasketaan likiarvo $x_n = x_h(t_n)$ EM:llä pisteessä $t = t_n$ käyttäen askelpituutta h, niin $x_h(t_n) = c(h)^{t_n}$, missä $c(h) = (1 + h)^{1/h}$.
Osoita tämän nojalla, että kiinteällä $t = t_n$ pätee $\lim_{h\to 0} x_h(t) = e^t$.

Tehtävässä tuskin tarvitaan ohjelmistoja.
EM = *Eulerin menetelmä*

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE011.tex

Avainsanat: Maplediffyhtälöt, diffyhtalot, mplODE,Picard-Lindelöf, Eulerin menetelmä

mplODE012.tex
Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] := 1;
for k from 0 to n-1 do      #  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= evalf(y[k]+h*f(k*h,y[k])) #    (samoin)
end do;
```

Piirrä Eulerin murtoviivat eri väreillä samaan koordinaatistoon.

Vihje
Datan piirto sujuu nykyisin "Matlab-tyylisesti":

```
 > xlista:=[seq(j*h,j=0..n)];
 > ylista:=[seq(y[j],j=0..n)]
 > plot(xlista,ylista)
```

[HAM]-viitteessä ss. 94-96 esitetyt tavat pisteparien listana toimivat myös, mutta s. 96 zip-temppu ei ole enää tarpeen.

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE012.tex

Avainsanat: diffyhtälöt, diffyhtalot, mplODE, Eulerin menetelmä, diffyhtölöiden numeriikkaa(ensi askel)

mplODE013.tex
Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje
Diffyhtälön saat ratkaistuksi komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

Vaativuus: 1+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE013.tex

Avainsanat: Maplediffyhtälöt, Maplediffyhtalot, mplODE, dsolve

mplODE014.tex Maple,(Matlab)

(a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Maplella (tai Matlabilla). Piirrä ratkaisukäyrä.

(b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Maple: dsolve, Matlab: ode45

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE014.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE014R.pdf (pdf-muodossa)
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE014R.mw (Maple worksheet,mw-tiedosto)

Avainsanat: MapleDifferentiaaliyhtälö, mplODE, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:
Coombes et al: Differential equations with Maple, Wiley
Boyce - DiPrima's: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,Wiley

mplODE015.tex Maple,Matlab
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{3t^2}{(3y^2 - 4)}, \quad y(1) = 0.$$

(a) Laske EM:llä ratkaisuapproksimaatiot pisteissä $t = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ käyttäen askelta $h = 0.1$.

(b) Tee sama askeleella $h = 0.05$.

(c) Vertaa tuloksia.

(d) Piirrä suuntakenttä ja ratkaisuapproksimaatioita, sekä EM-ratkaisuja. Osaatko selittää, miksi EM toimii kohtuullisesti alussa, mutta kelvottomasti lopussa?

Eulerin menetelmää voi tässä käyttää ohjelman Maple laskintyylillä, kuten edellä tai sitten oikeaksi funktioksi koodatulla versiolla, annetaan tässä nuo koodit.

Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin *apu.zip):

*** unzippaa apu ja laita kaikki 1 klikin taakse ***

Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE015.tex

Avainsanat:, Maplediffyhtälöt, differentiaaliyhtalot, mplODE,ODEnumeeriset menetelmät, Eulerin menetelmä

Viitteet:
`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

mplODE016.tex (vrt. Matlab: mlODE007.tex)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y - \ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä

(a) Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$

(b) Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$

(c) RK4- menetelmällä askelpituudella $h = 0.4$.

Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa.

Huomaa, että näillä askelpituuksien valinnoilla funktion arvojen laskentamäärät ovat samat.

Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin *** Etsi/pura/tee *** mplODE016apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

*** Laitetaan myös Heun ja RK4 ***

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Huom: Tästä voi kehitellä monenlaisia tehtävävariaatioita, myös ilman numeeristen menetelmien korostusta.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE016.tex

Avainsanat:diffyhtälöt, diffyhtalot, mplODE, mpldifferentiaaliyhtälöt,differentiaaliyhtälön numeriikka, numeeriset menetelmät, Eulerin menetelmä, Heunin menetelmä, Runge-Kutta, RK4

Viitteet:

`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley

[HAM] Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

mplODE017.tex, mlODE007.tex

Käyrän sovituksen yhteydessä huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$$y' = ay - by^2$$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun t mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

Opettajalle: Tehtävä voidaan käsitellä ehkä luontevamminkin kokonaan erillisenä numeeristen diffyhtälöratkaisujen opetuksesta. Tällöin otetaan vain alla olevat kohdat (c) ja/tai (d).

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämällä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella. (Kyseessähän on *Bernoullin yhtälö*.)

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.)
kts. http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.htmlsplinit
(Nykyään (2012) ei tarvita erillistä splinisovitusta, laskentapisteet voidaan antaa suoraan ode45-funktiolle syötteenä.)

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Tämä vain kehittely- ja opettelutarkoituksessa.
% Funktio eulerV hoitaa niin skalaari- kuin vektoriversion.
%  (24.2.04, modifioitu 21.8.2010)
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
%       f=@(t,y)t+y
%       [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6), plot(T,Y,T,Y,'.r');shg
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; %Pystyvektorit yhdenmukaisesti ode45:n
Y(1)=ya;                   %  kanssa
for j=1:n
   Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

Vaativuus: 2+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE017.tex

Ratkaisu: *** Hukassa, etsi/tee ***

Viitteitä:

http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf
http://www.math.hut.fi/ apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m
(Listaus yllä)

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella, logistinen kasvu, numeeriset menetelmät, Eulerin menetelmä, Heunin menetelmä, Runge Kutta

Maplefunktioita: dsolve

---

mplODE018.tex, mlODE008.tex
Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (Osannet ilmankin, mutta harjoittele myös Maplella.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.
Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä ("Bacward Euler"). Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.) ** Tulee aputiedostoon **

*** apu puuttuu ***

Viitteitä:

http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf
http://www.math.hut.fi/ apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m (Listaus yllä)

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE018.tex

Ratkaisu: *** ETSI/TEE***

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella, bacward Euler, stabiilisuus, implisiittinen Eulerin menetelmä, diffyhtälönumeriikkaa

Maplefunktioita: dsolve

Avainsanat: MatlabDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplDifferentiaali(yhtälöt),... add more ...

mplODE019.tex [mplBas017.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukau-

den päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö y_k:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE019.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE019R.pdf
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE019R.mw

Avainsanat: mplODE,Mapledifferenssiyhtälöt,Mapleperusteet,mplBasic

---

Luokittelu: Differenssi- ja differentiaaliyhtalot, Maple-perusteet.

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \rho y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

numeerisesti välillä $[0, 20]$, kun $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ja $\beta = 8/3$. Piirrä ratkaisukäyrät samaan kuvaan, ja piirrä käyrät $x(t)$ ja $z(t)$ parametrisesti. Tämän jälkeen piirrä 3-ulotteinen parametrisoitu käyrä kaikista koordinaateista.

Onko ratkaisu rajoitettu? Suppeneeko se kohti jotain arvoa?

Kokeile muuttaa alkuarvoja, sekä parametrien arvoja. Vallitsevan teorian mukaan systeemi on *kaoottinen dynaaminen systeemi*, jonka käyttäytyminen voi muuttua merkitsevästi jo pienistä muutoksista lähtötilanteessa; itse asiassa termi perhosvaikutus keksittiin kuvaamaan juuri tämän systeemin käytöstä.

Kolmiulotteinen parametrisoitu käyrä (tai pistejoukko) piirretään MATLABissa funktiolla `plot3`.

Vaativuus: 1-3+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDifferentiaali/mplD105.tex

Avainsanat: MatlabDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplDifferentiaali(yhtälöt),... add more ...

Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi, tai toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi. Voit ottaa $g/L = 1$.

Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut.

Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

Vaativuus: 1-3+
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplDifferentiaali/mplD15.tex

Avainsanat: MatlabDy, diffyhtälöt, diffyhtalot, mplDifferentiaali(yhtälöt),... add more ...

mplODE17.tex Ratkaise reuna-arvotehtävä

$$y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Maplella. Yritä ensin analyyttista. Jos/kun mitään ei palaudu, voit asettaa esim `infolevel[dsolve]:=3:`.
Näet ainakin, mitä Maple yrittää.
Siirry sitten tyyppiin `numeric`.

Suorita Maplella suoraan reuna-arvotehtävän ratkaisu, ja piirrä ratkaisufunktion kuvaaja.

Vihje:
Helpin esimerkkien avulla pääset kiinni ratkaisufunktioon. Kannattanee käyttää tarkennetta: *output=listprocedure*.

Vaativuus: 2
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplODE/mplODE17.tex

Ratkaisu:
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE17R.pdf
../mplteht/mplODE/ratkaisut/mplODE17R.mw

Avainsanat: mplODE,Maplediffyht,differentiaaliyhtaloita Maplella

Maplefunktioita: dsolve

---

mplPDE

mlPDE000.tex

Tähän tiedostoon kootaan laskaripaperiin sopivia pikaohjeita ja mielen virkistyksiä.

- .
- ..
- ...

---

141. mlPDE018.tex
Määritä sivuiltaan eristetyn sauvan $L = 10$ lämpötila $t = 2$ sekunnin kuluttua alkuhetkestä käyttämällä eksplisiittistä menetelmää numeeriseen approksimointiin. Valitse $h = 1$ ja $k = 0.5$ Alkulämpötila: $f(x) = x - 0.1x^2$ ja sauvan päät pidetään "jäissä". Tehtävä on siis:
$u_t = u_{xx}$ (Olkoon lämpöyhtälön vakio = 1.)
$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$ (Reunaehdot)
$u(x, 0) = f(x)$ (Alkuehto).

Piirrä alkulämpöätilafunktion $f(x)$ ja ratkaisufunktiota $u(x, 2)$ approksimoivan lämpötilamurtoviivan kuvaaja.

142. mlPDE020.tex

Neliöalueessa diskretoidun Laplacen yhtälön matriisi on muotoa:

$$A = \begin{bmatrix} B & I & O & \dots & O \\ I & B & I & O & \dots \\ O & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & & & & \\ O & \dots & I & B & I \\ O & \dots & \dots & I & B \end{bmatrix}, \text{ missä } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ja I on yksikkömatriisi sekä O nollamatriisi.

Jos solmuja on reunat mukaan lukien $n \times n$ kpl., niin sisäsolmuja on $(n-2)^2$ kpl. Tällöin B, I, O ovat $(n-2) \times (n-2)$ ja A on $(n-2)^2 \times (n-2)^2$ matriisi. A koostuu siis kolmesta lohkonauhasta, diagonaalilohkoina B ja ylä- ja alanauhalohkoina I.

Tällaisen matriisin muodostamiseen on monta tapaa. Kaikkein helpoin on valmiiksi ohjelmoitu MATLAB-funktio `delsq`. Koska matriisit ovat yleensä suuria, on syytä käsitellä niitä *harvoina* (engl. *sparse*), ts. nollia ei talleteta, ainoastaan nollasta poikkeavat indekseineen. Niinpä `delsq` rakentaa matriisista automaattisesti harvan. Jos haluat katsoa sitä tai sen osaa täytenä, käytä komentoa `full`. Kokeile:

```
help delsq
help numgrid
G=numgrid('S',10) % 'S' viittaa alueeseen ''Square''. Muitakin
A=delsq(G)        % on Matlabin numgrid-repertuaarissa.
full(A)
ans(1:10,1:10)
```

(Yhtä helppoa nelioalueen tapauksessa on käyttää omatekoista `lapm`-funktiota `matlab`-hakemistossa.)
Lopussa muita tapoja:

Kokeile näitä komentoja muutellen sopivasti parametreja. Suorita myös komento `help sparfun`, saadaksesi katsauksen tärkeään osaan MATLAB:ia: harvojen matriisien käsittelyfunktioihin.

Ratkaise tehtävä AV 3 käyttäen 50×50-hilaa reunat mukaan lukien, siis $48^2 \times 48^2$-matriisia A. Tulosvektori kannattaa muotoilla $48 \times 48-$matriisiksi komennolla `U=reshape(u,48,48)`, jolloin sen voi heti visualisoida komennolla `surf(U)`. Teepä se.

Esitys taululla: Kerro kokeiluistasi ja havainnoista, mitä opit harvoista matriiseista ja miten lopun suorit ja mitä tunnelmia kuva herätti. (Jos joku kohta, kuten kuva ei onnistunut, voit ihmetellä ääneen, miksi.)

Vihje:

-e

mplPerusteet

143. Tiedosto: mplP001.tex
Ohjelmat: Maple, [Mathematica]

Sievennä lauseke

$$\frac{x-1}{(1-\frac{1}{\sqrt{x}})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}.$$

Vihje: Kokeile funktiota `simplify`.

144. mplP002.tex (PA P1 s.2011)

1. Klikkaa hiirellä (Viikkoharjoitukset-sivun) tiedostoa (maple1.mw) tässä mplP002Pohja.mw ja avaa se ohjelmalla Maple 15. Käy läpi työarkin tehtävät ja siirry sen jälkeen alla oleviin tehtäviin.
2. a) Kokeile Maplen voimia seuraavien sarjojen kohdalla:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$$

   b) Montako termiä hajaantuvasta sarjasta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

   on otettava mukaan, jotta vastaava osasumma olisi vähintään 100?
   (`sum, evalf, infinity`)

Vihje:

145. mplP002a.tex (PA P1 s.2011)

Fibonaccin lukujono (f_n) määritellään alkuehdoilla $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ ja palautuskaavalla $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, kun $n \geq 2$. Samat luvut saadaan suoraan lausekkeesta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$$

arvolla $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Määrittele $f_n = f(n)$ funktiona ja osoita, että sekä alkuehdot että palautuskaava toteutuvat.
Vihje: Määrittele aluksi `phi:= ...` Palautuskaavan kohdalla on helpompi osoittaa jokin lauseke nollaksi kuin verrata kahta hankalaa lauseketta.
(`sqrt, simplify, expand`)

Vihje: Muista funktiomääritys:
`f:=n->...`

146. mplP002b.tex (PA P1 s.2011)
Intialaisen matemaatikon Srinivasa Ramanujanin (1887–1920) keksimän kaavan mukaan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1103 + 26390n)(4n)!}{396^{4n}(n!)^4}.$$

Tutki (numeerisesti), monennenko osasumman avulla saadaan luvun $1/\pi$ likiarvo 50 desimaalin tarkkuudella.
b) Määrittele sarjan yleinen termi $a_n = a(n)$ funktiona ja laske raja-arvo

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Sarja suppenee siis suunnilleen samaa vauhtia kuin sellainen geometrinen sarja, jonka suhdeluku on q.
(`Pi, sqrt, sum, evalf(luku, desimaalien lkm), limit`)

Vihje: Muista funktiomääritys:
`a:=n-> ...`

147. Suorita Maplella :

```
> series(exp(x), x = 0, 10);  # tai taylor(...);
> p:=convert(%,polynom);
> c:=coeffs(p,x);
> evalf(%);
```

Selitä, mitä näissä tapahtuu. (Tutki tarvitessasi helpillä tyyliin `?convert`.)

Piirrä polynomin p kuvaaja sopivalla välillä.

148. Etsi lukujen 1234^{3243} ja 7681 suurin yhteinen tekijä.

Vihje: Suurin yhteinen tekijä lasketaan funktiolla `igcd`. Jos myös kertoimet halutaan tietää, kannattaa käyttää funktioita `igcdex`.

Luokittelu, avainsanat: Mapleperusteet, mplPerusteet, syt, gcd, lukuteoriaa

149. mplP006.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

1. Laske $2^{123}, \pi^3, e^5$ neljälläkymmenellä (40) numerolla.
2. Mikä rationaaliluvuista $\frac{22}{7}, \frac{311}{99}, \frac{355}{113}$ approksimoi parhaiten π:tä ?
3. Kumpi luvuista π^e , e^π on suurempi?
4. Jaa tekijöihin polynomi $x^3 - y^3$

Vihje:

```
?evalf
?factor
```

150. mplP007.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Määrittele polynomilauseke $p = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.
Määritä p:n juuret ja piirrä kuvaaja välillä, joka sisältää juuret. Määritä myös paikalliset ääriarvot.

Vihje:

```
p:= ...   (ei siis p = ... (kuten Matlabissa))
plot(p,x=a..b)
?plot
solve   yrittaa tarkkaa analyyttista ratkaisua (vaikka onnistuisi, voi olla turhan mutkikas)
fsolve  numeerinen ratkaisija
```

Luokittelu: Maple perusteet, lausekkeet, yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

151. mplP008.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Piirrä samaan kuvaan x^4 ja 2^x ja selvitä, kuinka monessa pisteessä ne leikkaavat. Varmaan joudut piirtämään useita kuvia eri alueilta.

Suurimman juuren etsimisessä voi oikean alueen ehkä löytää nopeimmin tyyppiä `seq([x^4,2^x],x=a..b);` olevalla komennolla.

Tutki `fsolve`-komennon help-teksti ja määritä likiarvo suurimmalle juurelle.

Vihje: `seq(f(x),x=a..b)` toimii kokonaislukuaskelin.
Toki askel voidaan säätää halutuksi tähän tyyliin:

```
jono:=seq(a+i*h,i=0..10);
```

Luokittelu: Maple perusteet, jonot (seq), yhtälöt, nollakohdat, grafiikka

152. mplP009.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)
Mitä tekevät seuraavat Maple-komennot:

```
> sum(i^2,i=1..10);
> ifactor(1998); # Maple-oppaan kirjoitusvuosi
> ifactor(2012); # Aikaa on kulunut.
> solve({x+2*y=5,x^2+y^2=10},{x,y});
> solve([x+2*y = 5, x^2+y^2 = 10], [x, y])
```

Vihje: Kaksi solve-komennon muotoa liityvät tietorakenteisiin. Edellinen käsittelee joukkoina, jälkimmäinen listoina. (Joukon alkioilla ei ole määrättyä järjestystä päinvastoin kuin listassa.)

Luokittelu, avainsanat: Mapleperusteet, yhtälöryhmä, joukko, lista, tekijöihin jako.

153. mplP010.tex
Muodosta funktion $\cos(x)\sin(x)$ ensimmäinen ja toinen derivaatta ja piirrä kunkin kuvaaja sopivaksi katsomallasi välillä kenties mieluiten eri koordinaatistoihin.

Vihje:

154. mplP011.tex (HA:n Maple-kirja ss. 48-50)

Funktiolausekkeen derivaatta muodostetaan `diff`-komennolla.

Määritä seuraavien funktioiden 1. ja 2. derivaatta ja sievennä tulokset `simplify`-komennolla.

$6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $\frac{x+1}{x^2+1}$, $\cos(x^2 + 1)$, $\arcsin(2x + 3)$, $\sqrt{1 + x^4}$, $\arctan x$

Luokittelu, avainsanat: Mapleperusteet, Maplediffint, lauseke, symbolinen derivointi, diff

155. mlP014.tex, mplP014.tex
Maple [Mathematica] , Matlab (erityisesti b)-kohta).

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = 1 + \frac{sin(x)}{1 + x^2}.$$

a) Maple: Määrittele f lausekkeeksi, laske f:n arvo pisteessä $x = -2.0$ ja piirrä kuvaaja välillä $[-5, 5]$.

Matlab:
Tee vastaava asia Matlabilla, kirjoita skripti. Huomaa, että Matlabissa täytyy ensin antaa x:lle numeerinen (vektori)arvo.

b) Tee samat asiat, mutta nyt määrittelemällä f funktioksi.

Vihje:

a)

```
   Maple                                Matlab:

> f:=1-...                            >> x=...
> subs...                             >> f=...
> plot                                >> plot
```

b)

```
    Maple                              Matlab

> f:=x->1-...                        >> f:=@(x) 1-...
```

Ratkaisu: Ratkaisu:

```
mplPerusteet/mplP014R.mw  ja .pdf
mlPerusteet/mlP014R.m ja .pdf
```

Luokittelu:
`mplteht/mplPerusteet/mplP014.tex`, `matlabteht/mlPerusteet/mlP014.tex`
Avainsanat:
Mapleperusteet, funktiot, lausekkeet, Matlabperusteet

156. Laske funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvoja 0.5:n välein välillä $0 \ldots 5$, ja piirrä taulukoiduista arvoista kuvaaja

Vihje: Määrittele f funktioksi tyyliin `f:=x-> ...`
Muodosta jono seq-funktion avulla ja ympäröi se listasuluilla tyyliin: `h:=0.5: x:=[seq(k*h),k=...]`
Muodosta funktion arvot tyyliin `y:=map(f,x)`
Taulukon saat esim. array-funktiolla.
Datan voi piirtää nykyisin myös "Matlab-tyylillä": `plot(x,y)`

Ratkaisu:

```
x := [seq(.5*k, k = 0 .. 10)]
f := x->exp(-x^2)
y := map(f, x)
array([x, y])
plot(x,y)
```

157. Laske funktion $f(x) = e^{-x^2}$ arvoja 0.5:n välein välillä $0 \ldots 5$, ja piirrä taulukoiduista arvoista kuvaaja

Vihje:

158. mplP017.tex [mplD019.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö y_k:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Luokittelu: Maple-perusteet, Differenssi- ja differentiaaliyhtalot

Vihje:

mplTodennäköisyyslaskenta

mplPr01
Luo 30 satunnaislukua väliltä $[0, 1)$. Kuinka moni luvuista osuu välille $[0, 0.1)$? Kuinka monen pitäisi osua?

Vihje:

```
> with(Statistics)
> X := RandomVariable(('Uniform')(0, 1));
> S := Sample(X, 3); # 3:n pituinen satunnaisvektori.
```

Lisää aiheesta: http://www.mapleprimes.com/questions/137189-Using-Random-Numbers

Vaativuus: 1
Tehtävän Latex-koodi:
../mplteht/mplProbability/mplPr01.tex

Avainsanat: Stokastiikkaa Maplella,todennäköisyyslaskentaa, tilasto, mplPr, Probability and statistics

Maplefunktioita: with(Statistics)

-e

mplSarjat

159. Laske sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$$

summa. Millä arvoilla $x \in \mathbb{R}$ sarja suppenee? Piirrä summafunktion kuvaaja.

Vihje: Summa lasketaan komennolla `sum`

160. (Maple ja Matlab)

Määritä seuraavat summat:

$$\sum_{k=1}^{1000} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Vihje: Maple: Kokeile edelliseen sekä `sum` että `add` - komentoja, jälkimmäiseen vain `sum`.

Matlab: Muodosta vektori `1,2,...1000` ja sitten vain `sum`. Jälkimmäisessä voit laskea muutamalla, toinen toistaan suuremmalla arvolla. (Numeerisesti et tietenkään voi summata äärettömyyksiin.)

161. (Maple)

Määritä symboliset summat:

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Vihje: Maple-funktio `sum`
(Symbolinen summaus on integraalifunktion määrittämistä vastaava diskreetti tehtävä, usein jopa vaikeampi.)

-e

mplTodennäköisyyslaskenta

162. Luo funktiolla RND 30 satunnaislukua väliltä $[0, 1]$. Kuinka moni luvuista osuu välille $[0, 0.1)$? Kuinka monen pitäisi osua?

Vihje:

-e

mplVektorianalyysi

mplV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. "Tehtävä"-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Taylorin polynomit

Kahden muuttujan Taylorin polynomi kehitettynä pisteesä p voidaan kirjoittaa:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(p)$$

Tästä on helppo arvata, miten useamman muuttujan polynomi rakentuu.

Erityisesti 2. asteen Taylorin kaava voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(p+h) = f(p) + h^T \nabla f(p) + \frac{1}{2} h^T H_f(p) h + R_2(h),$$

joka pätee n:n muuttujan funktiolle sellaisenaan. Tässä jäännöstermi $R_2(h) = ||h||^3 O(h)$. (Eli riittävän pienessä p:n ystössä pätee: $R_2(h) \leq M||h||^3$ jollain vakiolla M.)

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T Ax$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,

4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.

Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös *symmetrisestä matriisista A*.

Suunnattu derivaatta ja gradientti

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\mathbf{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

Pinnan normaali ja tangenttitaso

Jos pinnan yhtälö esitetään muodossa $F(x, y, z) = 0$, saadaan edellisen perusteella pinnan tangenttitason yhtälö pisteessä p_0 näin:

$\nabla F(p_0)\dot{(}p - p_0) = 0$

Jos pinta on annettu muodossa $z = f(x, y)$, saadaan siten normaalin suunta funktion $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ gradienttina.

Tästä seuraa, että pisteeseen p_0 asetetun tangenttitason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 = f_1(p_0)(x - x_0) + f_2(p_0)(y - y_0).$$

($f_1$ja f_2 tarkoittavat osittaisderivaattoja.)

Kahden pinnan leikkauskäyrän tangentti

Leikkauskäyrän tangentti on kohtisuorassa molempien pintojen normaalia vastaan (eikö vain!). Siten leikkauskäyrän tangentin suuntainen vektori saadaan pinnan normaalivektorien ristitulona $\mathbf{t} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

Kriittiset pisteet, ääriarvot

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä.
Symmetrisen matriisin definiittisyyskäytös selvitetään ominaisarvojen avulla. Jos matriisi on $2 \rtimes 2$, voidaan käyttää determinanttia (kts. tehtävä mplV006a). Isommillekin matriiseille on determinanttiehtoja, mutta ne on hankala muistaa ja käyttää, jääkööt muistoksi “determinanttien kulta-ajoilta”.

Maple-ohjeita

Vektorikenttä ja gradientti

```
with(linalg): with(plots):
fieldplot(grad(f(x,y),[x,y]),x=a..b, y=c..d,arrows=slim,color=x);
# a:lla, b:lla jne. oltava tietysti numeeriset arvot.
```

Uusissa Maplen versioissa on kirjastopakkaus `VectorCalculus` ja siellä funktio `Gradient` lukuisine valitsimineen. Kts. helppi. Vanhan `linalg`-kirjaston kunnon `grad` on perustarpeisiin ehkä yksinkertaisin ja helppokäyttöisin.

Oma pikku funktio on usein selkein, se voidaan määritellä ongelmakohtaisesti esim. toimimaan vain 2d-tilanteessa. Tällainen gradienttifunktio voitaisin kaikessa yksinkertaisuudessaan määritellä näin: `gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`

Pintapiirroksen "valaiseminen" esim. avaruuskäyrillä

Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
 with(plots):
  f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
  x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
  pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
# HUOM! html:ssa edellinen nakyy vaarin, pitaa olla:
# pystyleikkaus:=spacecurve(Aaltoauki[x,y,f(x,y)],[x,y,0]Aaltokii,r=0..2,...)
# missa Aalto tarkoittaa aaltosulkua,
  x:='x':y:='y':  # Kannattaa muistaa vapauttaa.
  pinta:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2):
  display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour,transparency=0.5);
```

163. mplV001.tex
Piirrä seuraavien funktioiden tasa-arvokäyrät:

a) $x^3 - xy^3$

b) $\sin(x)cosh(y)$

c) $\cos^2(x)\cosh(y)$

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots)`).

164. mplV0011.tex

Mitkä ovat seuraavien funktioiden luonnolliset määrittelyjoukot:

a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, b) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ c) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

Piirrä (ensin käsin ja sitten Maplella) tasoon kunkin määrittelyjoukon kuva. Mitä topologisia ominaisuuksia joukoilla on? (*avoin, suljettu, rajoitettu, yhtenäinen, joukon reuna*, jne.)

Muodosta näiden funktioiden korkeuskäyrien (tasa-arvokäyrien) yhtälöt. Muodosta myös pystyleikkauskäyrät tasojen $x = 1$ ja $y = 1$ kanssa kussakin tapauksessa. Hahmottele käsin ja piirrä Maplella.

Vihje: Tasa-arvokäyriä voi piirtää kommennolla `contourplot` (ensin `with(plots))`). Lisää Maple-ohjeita 1. "tehtävässä" mplV000.tex.

165. mplV0012.tex
Onko seuraavilla funktioilla raja-arvo, kun $(x,y) \to (0,0)$:

$$\text{a)}\ \frac{x}{|x|+|y|} \qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{|x|+|y|}$$

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje: Tasa-arvokäyriin: `contourplot` (ensin `with(plots))`), pintoihin: `plot3d` (ei tarvitse latauksia) .
Lisää Maple-ohjeita "tehtävässä"1.(mplV000.tex).

166. mplV0013.tex
Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinaista raja-arvoa ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio on jatkuva ja missä taas ei?

Suorita Maplella visualisointeja.

Vihje: Kulje erityisesti O:sta alkavaa nousevaa sädettä (kulmakerroin posit.) 1. neljänneksessä kulkien sitä alaspäin kohti origoa. Mitä tapahtuu lopulta, kun ollaan riittävän lähellä O:a?

Ratkaisu: Piirrä kuvaaja funktion rajoittumasta mielivaltaiselle origon kautta kulkevalle suoralle; tutki tätä varten, missä pisteissä ko. suora leikkaa paraabelit $y = x^2$ ja $y = 2x^2$. Funktio on epäjatkuva näillä paraabeleilla.

167. mplV0014.tex

(a) Muodosta funktion $\ln(1+e^{x^2y^3z})$ 1. kertaluvun osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen.

(b) Osoita, että funktio $\arctan\frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

Vihje: Laske ainakin joku käsin ja tarkista kaikki Maplella. Tällaiset mekaaniset, tarkkuutta vaativat tehtävät ovat onnen omiaan CAS-ohjelmille, kuten Maple, Mathematica. Maplen `diff` hoitelee homman.

168. mplV0015.tex

(Myös mplDi017.tex (poistetaan))

Oletetaan, että funktioilla $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia, eli toteuttavat Laplacen differentiaaliyhtälön:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Vihje: Sopii sekä käsinlaskuun että Maplelle. Maple olettaa säännöllisyyttä tarpeeksi, jotta sekaderivaatat yhtyvät. Käyttäjän on tiedettävä, mitä pitää olettaa.

Mapletekniikkaa: b) Kirjoita CR-yhtälöt tyyliin

```
diff(u(x,y),x)=diff(v(x,y),y)
```

Maplen diff-operattorin täytyy tietää, että lauseke, johon derivointi kohdistuu, sisältää muuttujat x ja y. Muussa tapauksessa se räväyttää ilman muuta tuloksen 0 (nolla), joka on samalla tehtävän suorituksen arvo.

Ratkaisu: mplVektori/mplV0015R.mw ja .pdf

169. mplV0016.tex

Olkoon $f(x,y)=x^3y^2+x^4\sin y+\cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

Voit antaa Maplen laskea.

170. mplV0017.tex

Laske yhdistetyn funktion derivoimissääntöä (eli ketjusääntöä, "chain rule") käyttäen $\frac{\partial w}{\partial s}$ ja $\frac{\partial w}{\partial t}$, kun

(a) $w = x\ln(x^2 + y^2)$, $x = s + t, y = s - t$,
(b) $w = e^{x+2y}\sin(2x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2s^2 - t^2$

Tee käsin ja tarkista Maplella.

171. mplV0018.tex

Kolmionmuotoisen maa-alan kahden sivun mitatut pituudet ovat 224 m ja 158 m ja niiden välinen kulma 64° . Pituusmittauksen virheraja on 0.4 m ja kulman 2° . Mikä on pinta-alan likimääräinen suhteellinen maksimivirhe.

Vast: n. 2 %

172. mplV0019.tex

Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3.$
(b) Piirrä f:n gradienttikenttävektoreita `fieldplot`:n avulla samaan kuvaan korkeuskäyräpiirrosten kanssa. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje: Gradientti voidaan ladata useastakin kirjastosta. Selvintä on määritellä itse:
`gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`
(Voit myös ladata: `with(linalg);` ja saat käyttöön funktion `grad`)

`with(plots)` lataa `contourplot`- ja `fieldplot`-funktiot.
Grafiikkojen yhdistäminen:

```
kuva1:=contourplot(...)
kuva2:=fieldplot(...)
display(kuva1,kuva2);
```

173. mplV00191.tex
Työarkilla `../MattieT/mplteht/ohjeet/pintoja.mw (ja .pdf)` kohdassa "toinen esimerkki"tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Sekä plot3d- että contourplot-kuvat ovat lievästi sanoen harhaisia. (Toki erilaisilla optioilla voi plot3d-kuvaa olennaisesti parantaa.) Selvitä, minkälainen kuvaaja todellisuudessa on. Tarvitset taas sekä Maplea että kynää ja paperia. Piirtele myös pystyleikkauksia, oikeita korkeuskäyriä ym. ***

Hm, tämä on parasta muuttaa tehtäväksi (tai esimerkiksi), ratkaisu on suoraan tuolla, ja uudemmat versiot ovat poistaneet harhat.

***

Vihje: Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki (sama kuin alussa ohjetiedostossa mplV000.tex), jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
 with(plots):
  f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
  x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
  pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
# HUOM! html:ssa edellinen nakyy vaarin, pitaa olla:
# pystyleikkaus:=spacecurve(Aaltoauki[x,y,f(x,y)],[x,y,0]Aaltokii,r=0..2,...)
# missa Aalto tarkoittaa aaltosulkua,
  x:='x':y:='y':  # Kannattaa muistaa vapauttaa.
  pinta:=plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2):
  display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour,transparency=0.5);
  display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkkaa leikkauskayraa.
```

174. mplV00192.tex

Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x, y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplepiirroksin:
Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

b. Muodosta funktion $h(x, y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Vihje: Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

175. mplDi0019a.tex

Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$.

Olkoon $f(x, y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x, y) = k, k = 1, 2, 3$.
(b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x, y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje:

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

176. mplV003.tex
Piirrä avaruuskäyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\,\mathbf{j} + \arctan t\,\mathbf{k},$$

kun $t \in [1, T]$ ja $T = 100$. Määritä käyrän kaarenpituus ja tutki, onko sillä raja-arvoa, kun $T \to \infty$.

Vihje: Käyrä on luontevinta kirjoittaa listaksi `r = [cos(t)/t,sin(t)/t,arctan(t)]` ja laskea kaarenpituus integraalista $\int |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

177. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

178. mplV006.tex
Lausu neliömuodon $q(x) = x^T Ax$ definiittisyydet symmetrisen matriisin A ominaisarvojen (merkkien) avulla.

(Määritelmä paperin lopussa (tai kokoelman alussa).)

Vihje: Lausu neliömuoto pääakselikoordinaattien y_i avulla, sitten voit lukea kuin avointa kirjaa. (Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)

179. mplV006a.tex
(Puhdas päättelytehtävä, "tietokonevapaa".)
Osoita 2×2 symmetrisen matriisin A tapauksessa, että matriisi on

- definiitti (pos. tai neg.), jos ja vain jos $\det(A) > 0$,
- indefiniitti, jos ja vain jos $\det(A) < 0$,
- semidefiniitti, jos ja vain jos $det(A) = 0$

Vihje: Kirjoita $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ja muodosta karakteristinen polynomi. Käytä hyväksesi toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. (Jos et muista, niin kerro auki $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.)

Ratkaisu: mplV006aR.pdf ja .mw (html:ssa *ratkaisu*-linkki)

180. mplV006b.tex
Määritä seuraavien neliömuotojen matriisit sekä definiittisyys:

(a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$
(b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
(c) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_4^2 - 4x_2x_3$

Esitä neliömuodot pääakselikoordinaateissa. Ei ole pahitteeksi, vaikka piirrät joitakin kuvia.

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenvalues,1mplVektori

181. mplV006c.tex
Mitä kartioleikkausta edustaa yhtälö $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$

Muunna yhtälö pääakselimuotoon ja piirrä kuva. (Voit ottaa mallia `KRE` Exa 6 s. 396 "Transformation to principal axes".)

tai GRE 11.6 s. 589 Voit myös katsoa: `http://www.math.hut.fi/teaching/y3/harj/tyo/heigen.h`

Muista: Hyperbelin luonteva parametriesitys on $x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t$

Maple-ohjeita: harj6ohje.mws -TODO!-

Vihje:

Avainsanat: 1neliomuoto,1pos1neg1definiitti, 1paaakseliprobleema, 1principalaxes,1ominaisarvot,1eigenvalues,1mplVektori

182. TV-yhtiö on (pahaa aavistamatta) palkannut matemaatikon seikkailukilpailun juontajaksi. Kilpailussa tehtävänä on kiertää mahdollisimman lyhyt reitti sen kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0), (2, 0)$ ja $(0, 2)$. Lähtö tapahtuu pisteestä $(1, 0)$, ja kilpailijan tarvitsee koskettaa jokaista muuta kolmion sivua ja palata sitten alkupisteeseen Määritä lyhin tällainen reitti, ja sen pituus.

Vihje: Muodosta matkan funktio $f(x, y)$ – mieti ensin, mitä kuvaa x ja mitä y, ja sen jälkeen, kuinka etäisyys laskettaisiin (vihje: Euklidinen etäisyys). Tämän jälkeen etsi funktion f kriittiset pisteet, eli osittaisderivaattojen nollakohdat, ja tutki niiden laatua. Valitse näistä pisteistä minimin tuottava, ja laske pituus.

183. mplV010.tex
Määritä funktion $f(x, y) = \frac{1}{2+x-2y}$ astetta 2 oleva Taylorin polynomi kehitettynä pisteessä $(2, 1)$ Tee 2. asteen polynomi ensin käsin ja sitten Maplella. Kts. myös ohjetiedostoa (tulee).

Avainsanat: Usean muuttujan Taylorin polynomi, diff, D, perushelppo .

Ratkaisut tehtäviin mplV010 ja mplV011: “ratkaisut”-linkistä (molemmat samassa työarkissa).

184. mplV011.tex

a) Muodosta funktion $f(x,y) = \cos(x + \sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi kehitettynä $(0,0)$:ssa. Miten hyvän approksimaaton saat arvolle $f(0.1, -0.2)$? (Vertaa laskimen tai Maplen antamaan arvoon, ei tarvitse miettiä jäännöstermiarviota.)

b) Määritä funktion $f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y}$ asteita 2,3 ja 4 olevat Taylorin polynomit kehitettynä pisteessä $(2,1)$

b) Piirrä funktio $f(x,y)$ ja eriasteisia Taylorin polynomeja pintapiirrokisna ja/tai korkeuskäyrinä.

Kts. myös harj7ohje.mws

Avainsanat: Usean muuttujan Taylorin polynomi, diff, mtaylor,plot3d,contour.

Vihje: a)-kohta on käsinlasku, tarkistukseen siinäkin Maplen *diff*. b)-kohta Maplen *diff*-funktiolla. Lopuksi voit kokeilla myös *mtaylor*-komentoa. (Tarkoitus on Maple-avusteinen oppiminen, ei liian valmiiden “nappuloiden” paineleminen.)

Ratkaisut tehtäviin mplV010 ja mplV011: “ratkaisut”-linkistä (molemmat samassa työarkissa).

185. mplV012.tex
Määritä funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pistet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

186. mplV013.tex
Määritä funktion

$$f(x,y) = \cos x + \cos y$$

kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});`

187. DOKU mplV013a.tex
Määritä funktion

$$f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$$

suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$.

Maplen lisäksi kannattaa kokeilla Matlab:lla `meshgrid, max/min, find ...`-tekniikkaa. Toki ihan optimointiin räätälöityjä funktioitakin kummallakin ohjelmalla. Mutta ensisijaisesti ihan perustekniikoita, please!. (Osoittautuu sitäpaitsi, että `minimize`-tyyppiset "mustat laatikot" eivät oikein pärjää joka kohdassa.)

Jatkotehtävä: Määritä kaikki kriittiset pisteet yo. alueessa ja niiden luonne (max/-min/satula).

Vihje: Vaatimattomasta ulkoasustaan huolimatta voi olla hiukan työläs, mutta sitäkin opettavaisempi.
Jatkotehtävässä esiintyy ehkä yllättävääkin käytöstä.

188. mplV014.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)

Avainsanat: minimointi,optimointi, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Sopii puhtaasti käsinlaskuun, toki saa käyttää Maplea laskuapualaisena.

189. mplV016.tex
Määritä funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kriittiset pisteet (KRP) ja niiden luonne. (min/max/satula/singulaari) Havainnollista piirroksin.

Avainsanat: Kriittiset pisteet, min/max, osittaiderivaatta, nollakohta.

Vihje: Yhtälösysteemin ratkaisu: `solve({yht1,yht2},{x,y});` Polynomiyhtälöissä kannattaa usein jatkaa komennolla `allvalues`. Numeerinen ratkaisu: `fsolve`

190. mplV017.tex

a. Olkoon $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä $(2,-1)$. Piirrä pinta ja tangenttitaso ja pyörittele ja zoomaa.

b. Sama pinnalle $z = \arctan \frac{y}{x}$ pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.

Vihje: (Kts. ..H/harj6ohje.mws) -TODO-
Avainsanat: 1mplVektori,1tangenttitaso,1tangent1plane,1several1variables

191. mplV018.tex
Määritä lieriöiden

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$

leikkauskäyrän pisteen $(1,-1,1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

Edellinen voisi näyttää tältä:

```
plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
```

Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

```
display(kuva1,kuva2);
```

Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x,y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

192. Määritä funktion $f(x,y) = x^2 - y$ suurin arvo ympyrällä $x^2 + y^2 = 1$. Käytä Lagrangen menetelmää.

Vihje: `(diff, solve, f:= (x,y)->(x2+y)`. Jos et ehdottomasti osaa Lagrangen menetelmää, lataa `with(Student[MultivariateCalculus])` ja tutki *LagrangeMultipliers*-dokumentaatiota.

-e

mplYhtälöt

193. Ratkaise yhtälö $2x^6 + 4x^3 - 14x^2 + 1 = 0$.

Vihje: Maplen funktio `solve`.

194. Määritä polynomin

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

nollakohdat ja paikalliset minimit ja maksimit. Piirrä kuva.

Suorita sekä Maplella että Matlabilla.

Vihje: Maplella voit yrittää 3. asteen yhtälön ratkaisua myös symbolisesti `solve`-komennolla. Numeerisesti `fsolve`.

Matlabilla vain numeerisesti: `roots`.
Polynomin derivaatta: `polyder`

195. Maple , Matlab (H2T9)

Tarkastellaan väestönkasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella v yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin 10^6 yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku λ Käytä tätä λ:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

Vihje: Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

Avainsanat: Epälineaarinen yhtälö, väestönkasvumalli, epalineaarinen yhtalo, vaestonkasvumalli.

196. Maple tai Matlab Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7:n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`

Matlab: `roots`

197. Maple
Määritä ellipsin $9x^2+16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

198. Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlNl100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7:n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`
Matlab: `roots` Mathematica: ...

Ratkaisu: Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.
Avainsanat: Polynomin juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

199. Matlab/Maple/Mathematica
H2T17/mlNl100/mplY100/mmaY100

Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7:n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`
Matlab: `roots` Mathematica: ...

Ratkaisu: Ratkaisutiedostossa lisää variaatioita ja analyysiä tehtävään.
Avainsanat: Polynomin juuret, numeriikka, häiriöalttius, ill-conditioned

200. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

Vihje: Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.