Jyväskylän yliopisto | **Tietokoneharjoitus 1**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | 20–21.3.2013
MATA123 Laskennallinen lineaarinen algebra ja geometria | L. Leskelä

Tietokoneharjoituksissa käydään läpi Matlab-ohjelmiston käyttöä, ja soveltamista laskennalliseen lineaarialgebraan. Ensimmäisten harjoitusten aihepiiri on matriisien luominen, indeksointi, peruslaskutoimitukset ja lineaariset yhtälöryhmät.

Harjoitellessa tulee varmasti vastaan yrityksiä ja erehdyksiä — älä pelkää kokeilla! On hyödyllistä tietää, että Matlab:in komentokehotteessa saa edellisiä komentoja uudelleen muokattavaksi painamalla nuolinäppäintä ylöspäin. Tällä säästyt kirjoittamasta aina kaikkea uudelleen, mikäli edellisessä komennossa oli jokin pielessä.

1.1 Käynnistä Matlab käynnistysvalikosta. Hetken kuluttua ruutuun ilmestyy komentoikkuna, jossa on vasemmassa yläkulmassa kehote ">>". Luo omalle verkkolevyllesi uusi hakemisto, esim. `U:\MATA123\`, ja aseta luomasi hakemisto Matlab:in työhakemistoksi klikkaamalla komentoikkunan hakemistopalkin oikealla puolella näkyvää "..."-painiketta.

Syötä Matlab:iin komento

```
>> diary harjoitus1.txt
```

Tämä komento tallentaa komentoikkunaan syöttämäsi komennot sekä Matlab:in tulostuksen tekstitiedostoon `harjoitus1.txt`. On suositeltavaa, että ajat `diary`-komennon jokaisten harjoituksen alussa, jotta sinulle jää niistä muistiinpanot (esim. harjoitustyön tekoa varten). Kopioi diary-tiedosto myös vierustoverillesi, mikäli työskentelette samalla tietokoneella.

Syötä Matlab:iin komennot

```
>> help zeros
>> doc zeros
>> help
```

ja katso mitä saat vastaukseksi. Käy tämän jälkeen tarkistamassa, että työhakemistostasi löytyy tiedosto `harjoitus1.txt`, joka sisältää kirjoittamasi komennot.

1.2 Luo Matlab:in työtilaan 3×3 matriisi

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ja vektori} \quad u = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen laske

(a) matriisin Q transpoosi Q^T,

(b) summa $Q + Q^T$,

(c) matriisitulo $Q^T Q$,

(d) vektorin u sisätulo itsensä kanssa ($u^T u$) ja ulkotulo itsensä kanssa (uu^T),

(e) matriisi Q kertaa vektori u.

(f) Poimi matriisista Q toinen rivi (vaaka)vektoriin x ja kolmas sarake vektoriin y. Laske tulo xy.

1.3 MATLAB:issa saat laskettua käänteismatriisin komennolla `inv`. Etsi ratkaisu $x = (x_1, x_2, x_3)$ yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 7 \end{cases}$$

Vihje: edellinen tehtävä.

1.4 Luo MATLAB:in työtilaan satunnainen 3×3-matriisi R komentoa `rand` käyttäen. Muodosta lohkomatriisi $S = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$ ja (pysty)vektori $z = [1, 2, 3, 4, 5, 6]^T$ operaattoria : käyttäen. Laske vielä matriisitulo Sz.

1.5 Matriisin determinantti lasketaan MATLAB:issa komennolla `det`. Testaa matriisi-identiteettejä $(AB)^T = B^T A^T$ ja $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, esimerkiksi edellisten tehtävien matriiseilla Q ja R. Testaa vielä erityisesti tapausta $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

1.6 Kirjoita MATLAB:in komentokehoitteeseen

```
>> edit porrastesti
```

Ruudulle aukeaa MATLAB:in tekstieditori, jolla voit kirjoittaa M-tiedoston `porrastesti.m`. Kirjoita tiedostoon seuraavat rivit:

```
N = 3;
A = [0 2 1; -1 3 -2; 2 2 1];
b = [-2 1 -3]';
B = rref([A b]);
x = B(:,N+1);
```

Tallenna lopuksi tiedosto ja sulje editori.

Aja nyt `porrastesti.m` kirjoittamalla komentokehotteeseen komento `porrastesti`. Selvitä, mitä M-tiedoston `porrastesti.m` luomat matriisit B ja x ovat, ja miten ne liittyvät matriisiin A. Vihje: katso `help rref`. Toinen vihje: englanninkielisestä termistä "reduced row echelon form" käytetään suomeksi mm. nimiä "perusmuoto" ja "yksinkertainen porrasmuoto" (Ks. Saarimäki, LAG1, Luku 7).

Muuta seuraavaksi tehty M-tiedosto funktioksi avaamalla tiedosto jälleen editoriin komennolla `edit porrastesti`. Muuta tiedoston ensimmäinen rivi siten, että tiedosto näyttää seuraavalta:

```
function [A,b,x] = porrastesti(N)
A = rand(N);
b = rand(N,1);
B = rref([A b]);
x = B(:,N+1);
```

tallenna lopuksi tiedosto, ja sulje editori.

Kutsu nyt funktiota eri `N`:n arvoilla, ja tarkasta, että funktion antamat matriisit ovat mitä pitääkin. Komenna esimerkiksi:

```
>> [A,b,x] = porrastesti(20)
>> A*x-b
>> plot(A*x-b)
```

1.7 (*) (Tähtitehtävät ovat lisätehtäviä, joita voit tehdä, mikäli sinulle jää aikaa.)

Luo MATLAB:in työtilaan matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Laske matriisitulo $A^2 = AA$ ensin suoraan tulona ja sitten käyttämällä matriisipotenssioperaattoria `^`. Laske myös A:n toinen alkiottainen potenssi operaattorilla `.^`. Laske vielä matriisipotensseja A^3, A^4, ... Mitä havaitset?[1]

[1] A:n alkiot ovat ei-negatiivisia, ja vaakarivien summa on yksi. Tällainen matriisi voidaan tulkita *siirtymätodennäköisyysmatriisiksi*, jolloin $[A]_{ij}$ on ”todennäköisyys hypätä tilasta i tilaan j”. Tehtävässä havaittu ilmiö liittyy tällöin ns. Markovin ketjujen teoriaan, josta enemmän mm. kurssilla ”Markov-prosessit”.