Jyväskylän yliopisto	**Tietokoneharjoitus 2**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos	3–4.4.2013
MATA123 Laskennallinen lineaarinen algebra ja geometria	L. Leskelä

Käynnistä Matlab ja aseta työhakemistoksi haluamasi hakemisto. Muista komento `diary` ja käskyjen selaus nuoli ylös.

2.1 Kopioi tiedosto `O:\Visible2Everyone\MATA123_2013\ex2_1.mat` työhakemistoosi. Lataa Matlab:iin matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{sekä vektorit} \quad x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

komennolla `load ex2_1`. Tarkista, että komento latasi työtilaasi sopivat muuttujat (komennoilla `who` tai `whos` näet työtilan muuttujat).

(a) Muodosta matriisi M jonka sarakkeet muodostavat ortonormaalin kannan matriisin A sarakeavaruudelle (arvojoukolle) $\mathcal{R}(A)$ käyttäen käskyä `orth`.

(b) Tarkista, että M:n sarakkeet todella ovat ortonormaalit (Vihje: matriisitulo ja transpoosi).

(c) Tutki kuuluvatko vektorit x_1 ja x_2 matriisin A sarakeavaruuteen määrittämällä matriisien $S_i = [M, x_i]$ kun $i = 1, 2$ aste komennolla `rank`.

(d) Yritä ratkaista yhtälöä $Ay_i = x_i$ kun $i = 1, 2$. Kokeile komentoja `y1 = A \ x1` ja `y2 = A \ x2`. Mitä kyseiset komennot tuottavat (`help slash`)? Ratkeaako yhtälö?

(e) Etsi kanta matriisin A ytimelle (nolla-avaruudelle) $\mathcal{N}(A)$ komennolla `null` ja sijoita tulos matriisiin N. Tarkista, että saamasi kantavektorit todella ovat matriisin A ytimessä.

(f) Laske vielä `rank(A) + rank(N)`. Paljonko tuloksen pitäisi olla? (ks. Dimensiolause 15.10, Saarimäki LAG1-luentomoniste, 2012).

2.2 Seuraava taulukko kuvaa Suomen väkiluvun kehitystä vuosina 1900–1980:

vuosi	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980
väkiluku (tuhatta)	2656	2943	3148	3463	3696	4030	4446	4705	4771

Lataa väkiluvun kehitystä kuvaavat suureet p ja y Matlab:in työtilaan komennolla `load ex2_2` ja piirrä niistä kuva komennoilla `plot(y,p,'k*')`.

Muodosta matriisi $A = [1, y]$, missä 1 on sopivan pituinen vektori ykkösiä (komento `ones`). Etsi pienimmän neliösumman ratkaisu (ks. Lause 20.4, Saarimäki LAG2-luentomoniste, 2012) yhtälölle $Ab = p$ komentamalla Matlab:issa

```
>> b = inv(A'*A)*A'*p
```

Piirrä edellä sovittamasi funktion $f(y) = b_1 + b_2 y$ kuvaaja samaan kuvaan datan kanssa komennoilla

```
>> yy = linspace(1900,1980,100);
>> f = b(1)+b(2)*yy;
>> hold on
>> plot(yy, f)
```

Varmistele vielä, että ratkaisusi todella on pienimmän neliösumman ratkaisu:

- muodosta vektori $c = b + r$, missä r on "pieni" häiriövektori[1]
- laske suureen $\|Ac - p\| - \|Ab - p\|$ arvo (Vihje: komento `norm` laskee vektorin normin.)

Miksi ylläolevan suureen pitäisi olla aina ei-negatiivinen?

2.3 Luo skripti, joka piirtää kuvaajan funktiosta

$$f(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

kun $x \in [-5, 5]$ ja $t \in (0, 5]$, sekä vierelle toiseen kuvaan (`help figure`) f:n tasokäyrät (`help contour`).

2.4 Käytä komentoa `roots` (katso helppi) ja etsi seuraavien polynomien nollakohdat.

(a) $p(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$

(b) $p(z) = z^{11} - 3z^4 + 1$

Tarkista (Matlab:illa), että saamasi juuret ovat ko. polynomien nollakohtia. Vihje: tarkistus on nopeaa, kun käytät alkiottaista potenssioperaattoria `.^` nollakohtiin.

2.5 Komento `poly` antaa neliömatriisille B karakteristisen polynomin $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ kertoimet vektorissa. Kokeile komentoa satunnnaisesti generoimallasi 5×5-matriisilla. Tarkista, että saamasi polynomi on oikea laskemalla B:n ominaisarvot komennolla `eig`.

2.6 (*) Osittaisdifferentiaaliyhtälöllä $\Delta u = f$ (Poissonin yhtälö) voidaan mallintaa esim. kemiallisia konsentraatioita, lämpötilajakaumia tai sähköisiä potentiaaleja. Yhdessä dimensiossa

$$\begin{aligned}\Delta u = u''(x) &\approx \frac{1}{h}\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)),\end{aligned}$$

[1] Esimerkiksi "`r=randn`".

jolloin tehtävä

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases}$$

voidaan diskretoida ja likimäin ratkaista (miksi?) yhtälöstä $\Delta_h \bar{u} = \bar{f}$, missä $\Delta_h \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{k+1}$,

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} a \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ b \end{pmatrix},$$

missä $h = 1/k$ on diskretointiparametri; `x=0:h:1`. Tee funktio, joka saa argumentikseen luvut k, a, b ja vektorin $(f_1, \dots, f_{k-1})$, ratkaisee tehtävän ja piirtää ratkaisusta kuvan. Ratkaise $\bar{u}$ arvoilla $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 0$, sekä $a = b = 0$ ja $f(x) = -x(1-x)$.