Jyväskylän yliopisto **Tietokoneharjoitus 4**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos 17.–18.4.2013
MATA123 Laskennallinen lineaarinen algebra ja geometria L. Leskelä

Käynnistä MATLAB ja aseta työhakemistoksi haluamasi hakemisto. Muista komento `diary` ja käskyjen selaus nuoli ylös.

4.1 Tuota 2000 satunnaispistettä ympyrään arpomalla säteet tasajakaumasta välillä $(0,1)$ ja kulma tasajakaumasta $(0,2\pi)$. Piirrä pisteet kuvaan (`plot`, `polar`). Näyttävätkö pisteet tasajakautuneilta? Testaa vielä koodia

```
>> n = 2000;
>> theta = 2*pi*rand(1,n);
>> r = sqrt(rand(1,n));
>> x = r.*cos(theta);
>> y = r.*sin(theta);
>> plot(x,y,'.')
```

4.2 Halutaan sovittaa datajoukkoon $\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,3)\}$ neljännen asteen polynomi. Halutun polynomin kertoimet saadaan MATLAB:issa esimerkiksi seuraavalla tavalla:

```
>> x = (1:5)';
>> y = [1 1 2 2 3]';
>> A = [x.^4 x.^3 x.^2 x.^1 x.^0];
>> b = A\y;
```

Kuva tilanteesta saadaan komennoilla

```
>> xg = linspace(0,6,100)';
>> Ag = [xg.^4 xg.^3 xg.^2 xg.^1 xg.^0];
>> plot(x,y,'*'); hold on; plot(xg, Ag*b,'r');
```

Mikäli halutaan polynomi, joka ei kulje täsmälleen annettujen pisteiden kautta, vaan *läheltä* annettuja pisteitä, ja jonka kertoimet ovat itseisarvoltaan pieniä, voimmekin ratkaista muunnetun minimointitehtävän

$$\min_{\hat{b}\in\mathbb{R}^n}\left\{\|A\hat{b}-y\|^2+\|R\hat{b}\|^2\right\}$$

missä R on sopivasti valittu matriisi. Tämän minimointitehtävän ratkaisu saadaan yhtälöryhmästä (miksi, vertaa esim. pienimmän neliösumman menetelmään)

$$(A^TA+R^TR)\hat{b}=A^Ty.$$

Tämä on ns. *Tikhonovin regularisaatio* pienimmän neliösumman sovitteelle.

Valitaan Tikhonovin matriisiksi $R=\alpha I$, eli skaalattu identiteettimatriisi. Kokeile, miltä tämän tehtävän ratkaisu $\hat{b}$ näyttää, kun $\alpha=0.1$. Piirrä ratkaisupolynomi samaan kuvaan edellisen polynomin kanssa. Vertaile saamiasi ratkaisuvektoreiden b ja $\hat{b}$ alkioiden arvoja.

4.3 Laske $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\alpha^2}$, missä σ_i ovat edellisen tehtävän A:n singulaariarvoja ja α kuten edellisessä tehtävässä. Vertaa näitä matriisin $(A^TA+R^TR)^{-1}A^T$ singulaariarvoihin. Mitä Tikhonovin regularisaatio siis tekee?

4.4 Määritä MATLAB:in avulla neliömuodon $f(x,y,z) = 3x^2+y^2+z^2-2xy-2yz$ laatu (pos./neg. definiitti, pos./neg. semidefiniitti, indefiniitti). Vihjeitä:

(a) Kirjoita neliömuoto ensin matriisimuotoon u^TCu, missä $u = [x,y,z]^T$ ja C vakiomatriisi (kynällä ja paperilla!).

(b) Huomaa sitten, että $u^TCu = u^TC^*u$, missä $C^* = \frac{1}{2}(C+C^T)$ (miksi!).

Tutki lisäksi matriisin `C(1:2,1:2)` määräämän neliömuodon definiittisyys ja piirrä neliömuodosta kuva joukossa $[-1,1]\times[-1,1]$ kirjoittamalla neliömuoto muotoon $f(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ ja piirtämällä tavalliseen tapaan.

4.5 Hahmotellaan edellisen tehtävän neliömuodon tasa-arvopintaa $f(x,y,z) = 0$.

```
>> x = linspace(-5,5,100);
>> [xx,yy,zz] = meshgrid(x);
>> u = [xx(:) yy(:) zz(:)]';
>> f = reshape(dot(u,C*u), 100, 100, 100);
>> clf; isosurface(xx,yy,zz,f,0);
```

Jatketaan kokeilemalla, miltä neliömuodon $g(x,y,z) = f(x,y,z)+y^2$ tasa-arvopinta $g(x,y,z) = 4$ näyttää:

```
>> D = C;
>> D(2,2) = C(2,2) + 1;
>> g = reshape(dot(u,D*u), 100, 100, 100);
>> isosurface(xx,yy,zz,g,4);
```

Tarkista vielä g:n definiittisyys.

4.6 * Tee funktio, joka hahmottelee kuvan Mandelbrotin joukosta. Mandelbrotin joukko on se joukko vakion $c \in \mathbb{C}$ arvoja, jolle kompleksinen funktio $f_c(z) = z^2+c$ pysyy rajoitettuna, kun sitä iteroidaan lähtien liikkeelle z:n arvosta 0.

Vihjeitä: Seuraava funktion alku luo tasavälisen hilan kompleksitasoon, eli kompleksisen $n\times m$-matriisin C, jonka alkiot $-2 \le \mathrm{Re}[c_{ij}] \le 1$ ja $-1 \le \mathrm{Im}[c_{ij}] \le 1$.

```
>> function mandelbrot(m,n)
>> re_g = linspace(-2,1,m);
>> im_g = linspace(-1,1,n);
>> [c_real,c_imag] = meshgrid(re_g,im_g);
>> C = complex(c_real, c_imag);
```

Piirrä kuva siten, että lasket esimerkiksi 20 iteraatiota kullakin c:n arvolla $z_1 = 0$, $z_2 = f_c(z_1)$, $z_3 = f_c(z_2), \ldots$, ja piirrät ne c:n arvot, joille $|z_{20}| \le 2$.