

1.1 Olkoot A, B, C otosavaruuden Ω tapahtumia. Esitä joukko-opin kielellä seuraavat tapahtumat:

- (a) Vain A tapahtuu.
- (b) Sekä A että B tapahtuvat, mutta C ei.
- (c) Ainakin kaksi tapahtumista tapahtuu.

1.2 Muodosta kaikki otosavaruuden $\Omega = \{a, b, c\}$ sigma-algebrat.

1.3 Olkoon \mathcal{F} jokin otosavaruuden Ω sigma-algebra ja $A \in \mathcal{F}$. Todista, että

$$\mathcal{G} = \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$$

on otosavaruuden A sigma-algebra.

1.4 Todista, että otosavaruuden Ω mielivaltaiselle osajoukkojen kokoelmalle \mathcal{C} pätee $\sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$.

1.5 Olkoot \mathcal{C} ja \mathcal{D} otosavaruuden Ω osajoukkojen kokoelmia, joille pätee $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

- (a) Näytä, että \mathcal{C} :n ja \mathcal{D} :n virittämille sigma-algebroille pätee $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.
- (b) Onko mahdollista, että $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})$ mutta $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$?
(**Vihje:** Tarkastele kahden alkion otosavaruutta $\Omega = \{a, b\}$.)