Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA261 Johdatus stokastiikkaan

Laskuharjoitus 2
Ti 22.1.2013
L. Leskelä & M. Kuronen

2.1 Olkoon P otosavaruuden $\Omega = \{1, 2, \ldots, 7\}$ tasajakauma, $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$, $A \subset \Omega$.

(a) Laske satunnaismuuttujan $X(\omega) = \omega$ odotusarvo $E\{X\}$.

(b) Laske satunnaismuuttujan $Y = X^2$ odotusarvo $E\{Y\}$.

(c) Laske tapahtuman $Y > E\{X\}$ todennäköisyys.

2.2 Olkoot A ja B tapahtumia, missä $P(A) > 0$.

(a) Tutki ehdollisen todennäköisyyden määritelmää käyttäen, kumpi on suurempi,

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \quad \text{vai} \quad P(A \cap B \mid A) \quad ?$$

(b) Anna esimerkki tilanteesta, missä molemmat yllämainitut todennäköisyydet ovat yhtä suuria.

(c) Keksitkö esimerkin, missä toinen yllämainituista todennäköisyyksistä on aidosti toista suurempi?

2.3 Olkoon $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\lambda > 0$, ja määritellään

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \Omega.$$

(a) Todista, että $P(A) = \sum_{n \in A} p_n$ on tapahtuma-avaruuden 2^Ω tn-mitta. (**Vihje**: Kurssikirjan lauseen [JP04, Thm 4.1] perusteella riittää näyttää, että $p_n \geq 0$ kaikilla n ja $\sum_{n \in \Omega} p_n = 1$.)

(b) Laske satunnaismuuttujan $X(\omega) = \omega$ odotusarvo $E\{X\}$.

(c) Laske satunnaismuuttujan $X(\omega) = \omega$ varianssi $E\{(X - E\{X\})^2\}$.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

2.4 Olkoot A ja B tapahtumia, joille pätee $A \cap B = \emptyset$. Näytä, A ja B ovat riippumattomia jos ja vain jos $P(A) = 0$ tai $P(B) = 0$.

2.5 *Summaestimaatti.* Olkoon P jonkin otosavaruudella Ω määritellyn tapahtuma-avaruuden $\mathcal{A}$ tn-mitta.

(a) Todista induktioperiaatetta käyttäen, että mielivaltaisille tapahtumille $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ pätee

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i). \tag{1}$$

(b) Todista a)-kohdan avulla, että mielivaltaiselle tapahtumajonolle $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ pätee

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

(c) Anna esimerkki tapauksesta, missä (1) pätee yhtälönä.

(d) Keksitkö esimerkin tapauksesta, missä epäyhtälö (1) on aito?

Viitteet

[JP04] Jean Jacod and Philip Protter. *Probability Essentials.* Springer, second edition, 2004.