Jyväskylän yliopisto | **Laskuharjoitus 4**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ti 5.2.2013
MATA261 Johdatus stokastiikkaan | L. Leskelä & M. Kuronen

4.1 Määritellään kuvaus $X = 1_A$ otosavaruudelta Ω reaaliluvuille kaavalla

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \text{muuten}, \end{cases}$$

missä A on jokin sigma-algebran $\mathcal{A}$ tapahtuma.

(a) Selvitä kaikki mahdolliset kuvauksen X:n alkukuvat $X^{-1}(B)$, missä $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
(b) Tutki a)-kohdan avulla, onko X satunnaismuuttuja.

4.2 Olkoot $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttujia, $n \geq 1$.

(a) Todista, että myös $Z = \inf_{n \geq 1} X_n$ satunnaismuuttuja.
(b) Todista, että λX_1 on satunnaismuuttuja kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vihje: Tuloksen [JP04, Corollary 8.1 a)] mukaan kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen jos ja vain jos $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

4.3 Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio F määräytyy tiheysfunktiosta f, missä

$$f(x) = \frac{1_{(a,b)}(x)}{b-a}$$

ja $a < b$.

(a) Laske X:n odotusarvo $\mu_X = E\{X\}$.
(b) Laske X:n varianssi $\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\}$.

Vihje: Voit käyttää kurssikirjan tulosta [JP04, Corollary 9.1].

4.4 Olkoon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio F määräytyy tiheysfunktiosta f, missä

$$f(x) = 1_{(0,\infty)} \lambda e^{-\lambda x}$$

ja $\lambda > 0$.

(a) Laske X:n odotusarvo $\mu_X = E\{X\}$.
(b) Laske X:n varianssi $\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\}$.

Vihje: Voit käyttää kurssikirjan tulosta [JP04, Corollary 9.1].

Jatkuu seuraavalla sivulla...

4.5 Olkoon X tn-avaruuden $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ reaaliarvoinen satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujan X *virittämä sigma-algebra* määritellään kaavalla

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A = X^{-1}(B) \text{ jollain } B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

(a) Todista, että $\mathcal{F}$ on otosavaruuden Ω sigma-algebra.

(b) Todista, että X on mitallinen kuvaus $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$.

Viitteet

[JP04] Jean Jacod and Philip Protter. *Probability Essentials*. Springer, second edition, 2004.