Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA261 Johdatus stokastiikkaan

Laskuharjoitus 6
Ti 19.2.2013
L. Leskelä & M. Kuronen

6.1 Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/2$ ja $P(X = -1) = P(Y = -1) = 1/2$. Määritellään $Z = XY$.

(a) Ovatko X ja Z riippumattomat?

(b) Ovatko X ja Y riippumattomat?

(c) Onko kokoelma $\{X, Y, Z\}$ riippumaton?

6.2 Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia. Onko mitenkään mahdollista, että $P(X + Y = 7) = 1$?

6.3 Olkoon $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tn-avaruus.

(a) Olkoon C jokin tapahtuma, jolle $P(C) > 0$. Todista, että kuvaus $A \mapsto P(A \,|\, C)$ on tn-mitta $(\Omega, \mathcal{A})$:lla.

(b) Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja ja $B_0 \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko, jolle $P(X \in B_0) > 0$. Todista, että $B \mapsto P(X \in B \,|\, X \in B_0)$ on tn-mitta $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$:llä.

6.4 Diracin pistemassa pisteessä a määritellään kaavalla

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{kun } a \in A, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Todista, että δ_a on avaruuden $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ todennäköisyysmitta.

(b) Olkoon $f(x) = \sum_{i=1}^n b_i 1_{B_i}(x)$ kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä $B_i \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Laske yksinkertaisen satunnaismuuttujan odotusarvon määritelmää käyttäen odotusarvo (eli Lebesguen integraali) $\int_\mathbb{R} f(x)\, \delta_a(dx)$.

(c) Osaatko b)-kohdan tulosta hyödyntäen laskea integraalin $\int_\mathbb{R} f(x)\, \delta_a(dx)$ mielivaltaiselle mitalliselle kuvaukselle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$?

Jatkuu seuraavalla sivulla...

6.5 Olkoot $\{p_i, i \in I\}$ ja $\{x_i, i \in I\}$ reaalilukuja, missä I on äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko. Oletetaan, että $p_i \geq 0$ kaikilla i ja $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Määritellään $\mu = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ kaavalla

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}(A).$$

(a) Todista, että μ on avaruuden $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ todennäköisyysmitta.

(b) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ positiivinen mitallinen funktio. Todista, että

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx) = \sum_{i \in I} p_i f(x_i).$$