Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA271 Stokastiset mallit

Laskuharjoitus 1
Ma 19.9.2011
L. Leskelä

1.1 *Sattuman taksonomia.* Selaa läpi David Aldousin verkkosivulla `http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Real-World/100.html` listattuja esimerkkejä sattuman kokemisesta ja havaitsemisesta reaalimaailmassa.

(a) Yritä keksiä 3–5 luokkaa, mihin satunnaisuuden eri ilmentymiä voidaan luokitella. Luokitteluperusteet voit vapaasti itse keksiä.

(b) Onko mielestäsi mahdollista luokitella Aldousin lista järkevästi 3–5 kategoriaan?

(c) Jos olet sitä mieltä, että luokittelu ei ole mahdollista, perustele miksi.

1.2 *Umpimähkään valittu kokonaisluku.* Luvuista $\{1, 2, \dots, 100\}$ valitaan umpimähkään yksi. Esitä joukko-opin avulla seuraavat tapahtumat ja laske vastaavat todennäköisyydet:

(a) Valittu luku on kaksinumeroinen.

(b) Valittu luku on kaksinumeroinen, joka ei ole jaollinen luvulla 11.

(c) Valittu luku on seitsemällä jaollinen.

1.3 *Ehdolliset todennäköisyydet.* Olkoon Ω kahta symmetristä nopanheittoa kuvaava tn-avaruus ja P vastaava tn-mitta, jolle pätee $P(\{\omega\}) = 1/36$ kaikilla otoksilla ω. Keksi esimerkkejä tapahtumista missä

(a) $P(A \,|\, B) < P(A)$,

(b) $P(A \,|\, B) = P(A)$,

(c) $P(A \,|\, B) > P(A)$.

1.4 *Facebook-juorut.* Vanhat luokkatoverit Aada, Bertta ja Cecilia muodostavat Facebook-kaverisuhteita satunnaisesti siten, että kukin pari linkittyy keskenään muista riippumatta todennäköisyydellä $p = 0.9$. Mikäli joku kolmikosta kuulee juorun, välittää hän sen heti kaikille Facebook-kavereillensa eteenpäin. Jos Aada kuulee juorun, mikä on todennäköisyys että:

(a) Cecilia kuulee sen?

(b) Cecilia kuulee sen, jos Aada ja Bertta eivät ole Facebook-kavereita?

(c) Cecilia kuulee sen, jos hän ei ole Aadan Facebook-kaveri?

Jatkuu seuraavalla sivulla...

1.5 *Todennäköisyysvektorit ja -mitat.* Vektori $p = (p_1, \dots, p_n)$ on *todennäköisyysvektori*, jos $p_i \geq 0$ kaikilla i ja $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Kun on annettuna otosavaruus $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ja todennäköisyysvektori $p = (p_1, \dots, p_n)$, määritellään joukkofunktio P kaavalla

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i, \quad A \subset \Omega.$$

Näytä, että näin määritelty P on *todennäköisyysmitta*, eli että pätee

(a) $P(\Omega) = 1$,

(b) $P(A^c) = 1 - P(A)$ kaikille tapahtumille $A \subset \Omega$,

(c) $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$ kaikille erillisille tapahtumille $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$.

1.6 *Summaestimaatti.* Olkoon P äärellisen otosavaruuden Ω tn-mitta.

(a) Todista, että mielivaltaisille tapahtumille $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ pätee

$$P(\bigcup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k P(A_i). \tag{1}$$

(b) Anna esimerkki tapauksesta, missä (1) pätee yhtälönä.

(c) Anna esimerkki tapauksesta, missä epäyhtälö (1) on aito.