2.1 *Riippumattomat indikaattorit.* Olkoot $\theta_1, \ldots, \theta_n$ rippumattomia Bernoulli-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $p \in (0,1)$. Laske seuraaville satunnaismuuttujien jakauma ja odotusarvo:

(a) $X = \theta_1 + \cdots + \theta_n$,

(b) $Y = \theta_1 \cdots \theta_n$.

2.2 *Tn-avaruuden rakentaminen.* Olkoot $p_1, \ldots, p_n$ numeroituvan tila-avaruuden $S \subset \mathbb{R}$ todennäköisyysfunktioita. Määritellään $\Omega = S^n$, kuvaus P kaavalla

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_1(\omega_1) p_2(\omega_2) \cdots p_n(\omega_n), \quad A \subset \Omega,$$

ja kuvaukset $X_1, \ldots, X_n$ kaavoilla

$$X_i(\omega) = \omega_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Näytä, että P on todennäköisyysmitta.

(b) Näytä, että satunnaismuuttujan X_i jakauma on p_i.

(c) Näytä, että satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat.

2.3 *Apina kirjailijana.* Apina istuu tietokoneen ääressä ja lyö umpimähkään 50-merkkistä näppäimistöä (josta caps lock poistettu).

(a) Oletetaan, että apina tuottaa vuoden aikana tekstin, jossa on sata miljoonaa merkkiä. Kuinka monta kertaa sana ”kivi”keskimäärin esiintyy tekstissä?

(b) Seitsemän veljestä -teoksessa on 635 864 merkkiä. Kuinka pitkä teksti apinan tulee kirjoittaa, jotta kyseisen teoksen sanatarkka toisinto (isot kirjaimet unohtaen) esiintyy tekstissä keskimäärin vähintään yhden kerran?

2.4 *Riippumattomien satunnaismuuttujien kuvaukset.* Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia numeroituvassa tila-avaruudessa $S \subset \mathbb{R}$ ja olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltaisia funktioita.

(a) Todista kaavat

$$P(f(X) = a) = \sum_{s \in S : f(s) = a} P(X = s),$$

$$P(g(Y) = b) = \sum_{s \in S : g(s) = b} P(Y = s).$$

(b) Todista, että

$$X \text{ ja } Y \text{ riippumattomat} \quad \Longrightarrow \quad f(X) \text{ ja } g(Y) \text{ riippumattomat.}$$

Jatkuu seuraavalla sivulla…

2.5 *Kytketyt parit ER-satunnaisverkossa.* Tarkatellaan Erdősin–Rényin satunnaisverkkoa $G(n, p)$, missä on solmut $\{1, \dots, n\}$ ja kukin solmupari kytketään todennäköisyydellä p, muista kytkennöistä riippumatta. Mallinnetaan kyseistä verkkoa riippumattomalla kokoelmalla indikaattorisatunnaismuuttujia $\{\theta_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$, missä $\theta_{i,j} = 1$ jos pari (i, j) on kytketty ja $\theta_{i,j} = 0$ muuten.

(a) Laske odotusarvo verkojen kytkettyjen parien lukumäärälle N.

(b) Miten kyseinen odotusarvo käyttäytyy suurella n, kun kytkemistodennäköisyys p on n:n funktio: $p(n) = \lambda/n$, jollain $\lambda > 0$?

(c) Mikä on N:n jakauma?

2.6 *Kytketyt kolmiot ER-satunnaisverkossa.* Tarkatellaan samaa Erdősin–Rényin satunnaisverkkoa $G(n, p)$ kuin edellisessä tehtävässä. Sanotaan, että verkon solmut i, j, k muodostavat kolmion, mikäli parit (i, j), (j, k) ja (i, k) on kytketty. Olkoon Δ_G verkon kytkettyjen kolmioiden lukumäärä.

(a) Laske satunnaismuuttujan Δ_G odotusarvo.

(b) Miten kyseinen odotusarvo käyttäytyy suurella n, kun kytkemistodennäköisyys p on n:n funktio: $p(n) = \lambda/n$, jollain $\lambda > 0$?