Jyväskylän yliopisto | **Laskuharjoitus 4**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ma 10.10.2011
MATA271 Stokastiset mallit | L. Leskelä

4.1 *Poisson-jakauman generoiva funktio.* Olkoon X Poisson-jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla λ.

(a) Laske X:n todennäköisyydet generoiva funktio $G_X(s)$.

(b) Mille s:n arvoille $G_X(s)$ on määritelty?

4.2 *Kahden Poisson-jakauman summa.* Olkoon $Z = X + Y$, missä X ja Y ovat riippumattomia Poisson-jakautuneita satunnaismuuttujia.

(a) Laske Z:n todennäköisyydet generoiva funktio.

(b) Päättele a)-kohdan avulla, mikä on Z:n jakauma.

4.3 *Varianssin laskeminen generoivan funktion avulla.* Olkoon $X \in \mathbb{Z}_+$ satunnaismuuttuja, jonka todennäköisyydet generoiva funktio G_X on määritelty jollain välin $[-1, 1]$ sisältävällä avoimella välillä. Näytä, että

(a) $EX = G'(1)$,

(b) $\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

4.4 *Kauppaketjun varastonhallinta.* Ruokakauppaketjun keskusvarastoon tilataan kunkin kuukauden viimeinen päivä 1.5 miljoonaa tonnikalapurkkia sisältävä rekkakontti. Oletamme, että kukin tilattu rekkakuorma jää saapumatta todennäköisyydellä 10 %. Keskusvarastosta toimitetaan ruokakauppoihin kuukauden aikana Poisson-jakautunut määrä tonnikalapurkkeja, jonka keskiarvoksi on arvioitu 1.35 miljoonaa.

(a) Laske kuukausittaisen varastonmuutoksen odotusarvo ja varianssi.

(b) Mallinna varaston koon kuukausittaista kehitystä satunnaiskulkuna, jossa varaston koko voi olla negatiivinen. Miten negatiivinen varastonkoko voidaan käytännössä tulkita?

(c) Arvioi Chebyshevin epäyhtälön avulla, kuinka suuri määrä varastossa tulee olla tonnikalapurkkeja tällä hetkellä, jotta todennäköisyys, että vuoden kuluttua varasto olisi miinuksella, on enintään 1 %.

4.5 *Satunnainen summa.* Olkoot $N, X_1, X_2, X_3, \ldots$ riippumattomia satunnaismuuttujia tila-avaruudessa $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ noudattavat samaa jakaumaa. Määritellään $M = \sum_{k=1}^{N} X_k$, missä summan arvo tulkitaan nollaksi silloin kun $N = 0$.

(a) Todista, että $G_M(s) = G_N(G_{X_1}(s))$.

(b) Laske G_M, kun N on Poisson-jakautunut parametrilla λ ja $X_1, X_2, \ldots$ Bernoulli-jakautuneita parametrilla p.

(c) Mikä on M:n jakauma b)-kohdan tapauksessa?

Jatkuu seuraavalla sivulla...

4.6 *Satunnaiskulun trendi.* Olkoot $X_1, X_2, \dots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla on odotusarvo $\mu < 0$ and varianssi $\sigma^2 < \infty$. Merkitään $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Näytä, että $P(S_n \geq c) \to 0$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

(b) Mitä tämä tulos kertoo S_n:n käytöksestä suurilla n?

(Vihje: Chebyshevin epäyhtälö.)