

5.1 *Haarautumisprosessin trendi.* Tarkastellaan haarautumisprosessia (Z_n) , missä jälkikasvun odotusarvo on μ . Todista, että

$$EZ_n = \mu^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.2 *Kriittisen haarautumisprosessin varianssi.* Tarkastellaan haarautumisprosessia (Z_n) , missä jälkikasvun odotusarvo on $\mu = 1$ ja varianssi σ^2 . Todista, että

$$\text{Var}(Z_n) = n\sigma^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.3 *Ei-kriittisen haarautumisprosessin varianssi.* Tarkastellaan haarautumisprosessia (Z_n) , missä jälkikasvun odotusarvo on $\mu \neq 1$ ja varianssi σ^2 . Todista, että

$$\text{Var}(Z_n) = \sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}(\mu - 1)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.4 *Rajoitettu jälkikasvu.* Tarkastellaan haarautumisprosessia, missä yksilö saa nolla jälkeläistä todennäköisyydellä $1/8$, yhden jälkeläisen todennäköisyydellä $1/2$, ja kaksi jälkeläistä todennäköisyydellä $3/8$.

- (a) Laske jälkikasvun lukumäärän todennäköisyydet generoiva funktio $G(s)$.
- (b) Etsi yhtälön $G(s) = s$ ratkaisut.
- (c) Laske todennäköisyys, että populaatio kuolee sukupuuttoon.

5.5 *Geometrisesti jakautunut jälkikasvu.* Tarkastellaan haarautumisprosessia, missä yksilön jälkikasvun lukumäärän jakauma on $P(X = k) = (1 - p)p^k$, $k = 0, 1, \dots$.

- (a) Laske jälkikasvun lukumäärän todennäköisyydet generoiva funktio $G(s)$.
- (b) Etsi yhtälön $G(s) = s$ ratkaisut.
- (c) Laske todennäköisyys, että populaatio kuolee sukupuuttoon.

5.6 *Haarautumisprosessin kovarianssi.* Tarkastellaan haarautumisprosessia (Z_n) , missä jälkikasvun odotusarvo on μ ja varianssi σ^2 .

- (a) Laske $E(Z_m Z_n)$, kun $m < n$. (Vihje: $1 = \sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{Z_m=k\}}$).
- (b) Laske $\text{Cov}(Z_m, Z_n) := EZ_m Z_n - (EZ_m)(EZ_n)$.