

- 6.1** *Geometrisen jakauman häntä.* Olkoon N satunnaismuuttuja, jolle $P(N = k) = (1 - p)^{k-1}p$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$, missä $p = 2/3$.
- (a) Laske N :n todennäköisyydet generoiva funktio.
 - (b) Etsi Chernoffin epäyhtälöä käyttäen yläraja todennäköisyydelle $P(N \geq a)$, missä $a = 2011$.
 - (c) Laske todennäköisyyden $P(N \geq a)$ tarkka arvo.
- 6.2** *Pariskuntien lukumäärä.* Tarkastellaan $2n$:n yksilön populaatiota, missä on n pariskuntaa. Oletetaan, että populaatiosta m satunnaisesti valittua yksilöä kuolee. Laske elossa olevien pariskuntien lukumäärän odotusarvo?
- 6.3** *Hissin luotettavuus.* Hississä on n teräsvaijeria, ja oletetaan, että hissi toimii, kun vaijereista vähintään k on ehjiä. Oletetaan, että kukin vaijeri katkeaa todennäköisyydellä p muista riippumatta. Merkitään θ_i :llä indikaattorimuuttujaa, joka kuvaa vaijerin i toimintaa.
- (a) Kirjoita θ_i -muuttujien avulla indikaattorimuuttuja tapahtumalle, että hissi toimii.
 - (b) Laske todennäköisyys, että hissi toimii, kun $n = 8$, $k = 6$ ja $p = 10^{-6}$.
- 6.4** *Satunnainen leikkausverkko.* Satunnainen leikkausverkko $G(n, m, r)$, jossa on n solmua, muodostetaan seuraavasti. Verkon kullakin solmulla on kokoelma ominaisuuksia, jotka valitaan satunnaisesti m :n ominaisuuden joukosta siten, että kukin ominaisuus tulee valituksi todennäköisyydellä r muista valinnoista riippumatta. Solmut i ja j ovat naapureita, merkitään $i \leftrightarrow j$, mikäli niillä on jokin yhteinen ominaisuus. Merkitään

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jos solmulla } i \text{ on ominaisuus } j, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Laske todennäköisyys, että mielivaltaisesti valitut solmut i ja j ovat naapureita.

- 6.5** *Satunnaisen leikkausverkon asteluku.* Laske satunnaisen leikkausverkon $G(n, m, r)$ mielivaltaisesti valitun solmun keskimääräinen asteluku.
- 6.6** *Satunnaisen leikkausverkon klusterointikerroin.* Laske satunnaisen leikkausverkon $G(n, m, r)$ klusterointikerroin:

$$c = P(i \leftrightarrow k \mid i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k),$$

missä i, j, k ovat mielivaltaisesti valittuja erillisiä solmuja.