

**1.1** *Sattuman taksonomia.* Selaa läpi David Aldousin verkkosivulla

<http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Real-World/100.html>

listattuja esimerkkejä sattuman kokemisesta ja havaitsemisesta reaali maailmassa.

- (a) Keksi 3–5 luokkaa, mihin satunnaisuuden eri ilmentymiä voidaan luokitella. Luokitteluperusteet voit vapaasti itse keksiä.
- (b) Onko mielestäsi mahdollista luokitella Aldousin lista järkevästi 3–5 kategoriin?
- (c) Jos olet sitä mieltä, että luokittelu ei ole mahdollista, perustele miksi.

**1.2** *Umpimähkään valittu kokonaisluku.* Luvuista  $\{1, 2, \dots, 100\}$  valitaan umpimähkään yksi. Esitä joukko-opin avulla seuraavat tapahtumat ja laske vastaavat todennäköisyydet:

- (a) Valittu luku on kaksinumeroinen.
- (b) Valittu luku on kaksinumeroinen, joka ei ole jaollinen luvulla 11.
- (c) Valittu luku on seitsemällä jaollinen.

**1.3** *Ehdolliset todennäköisyydet.* Olkoon  $\Omega$  kahta symmetristä nopanheittoa kuvaava tn-avaruus ja  $P$  vastaava tn-mitta, jolle pätee  $P(\{\omega\}) = 1/36$  kaikilla otoksilla  $\omega$ . Keksi esimerkkejä tapahtumista missä

- (a)  $P(A|B) < P(A)$ ,
- (b)  $P(A|B) = P(A)$ ,
- (c)  $P(A|B) > P(A)$ .

**1.4** *Tn-vektorit ja tn-mitat.* Vektori  $p = (p_1, \dots, p_n)$  on *todennäköisyysvektori*, jos  $p_i \geq 0$  kaikilla  $i$  ja  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Kun on annettuna otosavaruus  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  ja todennäköisyysvektori  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , määritellään joukkofunktio  $P$  kaavalla

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i, \quad A \subset \Omega.$$

Näytä, että näin määritelty  $P$  on *todennäköisyysmitta*, eli että pätee

- (a)  $P(A) \geq 0$  kaikilla  $A \subset \Omega$ ,
- (b)  $P(\emptyset) = 0$  ja  $P(\Omega) = 1$ ,
- (c)  $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$  kaikille erillisille tapahtumille  $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ .

*Jatkuu seuraavalla sivulla...*

**1.5** *Facebook-juorut.* Vanhat luokkatoverit Aada, Bertta ja Cecilia muodostavat Facebook-kaverisuhteita satunnaisesti siten, että kukin pari linkittyy keskenään muista riippumatta todennäköisyydellä  $p = 0.9$ . Mikäli joku kolmikosta kuulee juorun, välittää hän sen heti kaikille Facebook-kavereillensa eteenpäin. Jos Aada kuulee juorun, mikä on todennäköisyys että:

- (a) Cecilia kuulee sen?
- (b) Cecilia kuulee sen, jos Aada ja Bertta eivät ole Facebook-kavereita?
- (c) Cecilia kuulee sen, jos hän ei ole Aadan Facebook-kaveri?