3.1 *Billin rulettipeli.* Bill pelaa 300 kierrosta rulettia, panostaen kullakin kierroksella yhden euron pienelle luvulle (1–18). Billin alkupääoma on $V_0 = 300$ euroa. Merkitään Billin pelitilin arvoa t:n pelikierroksen *jälkeen* symbolilla V_t, $t = 1, \dots, 300$.

(a) Olkoon $U_1, \dots, U_{300}$ riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $S = \{0, 1, \dots, 36\}$. Määrittele funktio f, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} f(U_s).$$

(b) Mikä on satunnaismuuttujan V_{300} arvojoukko?

(c) Laske a)-kohdan tulosta apuna käyttäen odotusarvo EV_{300}.

(d) Olkoon θ_s tapahtuman $\{U_s \in [1, 18]\}$ indikaattorisatunnaismuuttuja. Perustele, miksi θ_s noudattaa $\mathrm{Ber}(p)$-jakaumaa jollain p ja laske p:n arvo.

(e) Määrittele funktio g, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + g\left(\sum_{s=1}^{t} \theta_s\right).$$

(f) Todista e)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että

$$P\left(\frac{V_{300} - V_0}{V_0} \geq 0.1\right) = \sum_{k=j}^{300} \binom{300}{k} p^k (1-p)^{300-k}$$

eräällä j:n arvolla ja määritä j.

3.2 *Carlosin rulettipeli.* Carlos pelaa 300 kierrosta rulettia, panostaen kullakin kierroksella yhden euron luvulle 28. Carlosin alkupääoma on $V_0 = 300$ euroa. Vastaa Carlosin pelin osalta samoihin kysymyksiin kuin tehtävässä 3.1, kun tehtävän 3.1 d)-kohdassa θ_s:n määritelmä muutetaan vastaamaan tapahtuman $\{U_s = 28\}$ indikaattorisatunnaismuuttujaa.

3.3 *Äärettömän joukon tasajakauma.* Halutaan poimia satunnainen luku joukosta $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ siten, että jokainen luku on yhtä todennäköinen. Onko tällainen valinta mahdollista suorittaa? Mikä tällöin on todennäköisyys, että saadaan luku 7?

3.4 *Riippumattomat geometriset satunnaismuuttujat.* Olkoon X satunnaismuuttuja, joka noudattaa geometrista jakaumaa joukossa $\{1, 2, \dots\}$ onnistumis-tn:llä p, toisin sanoen,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Olkoon Y geometrista jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja onnistumis-tn:llä q ja oletetaan, että X ja Y ovat riippumattomat. Merkitään $Z = \min(X, Y)$.

(a) Todista, että $P(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$ ja $P(Y \geq k) = (1 - q)^{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$.

(b) Todista a)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että $P(Z \geq k) = (1 - r)^{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$ ja määritä luku r, jolle näin pätee.

(c) Todista b)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että satunnaismuuttujan Z pistetodennäköisyysfunktio on $p_Z(k) = (1 - r)^{k-1}r$, $k \geq 1$, eli että Z noudattaa geometrista jakaumaa onnistumis-tn:llä r.

3.5 *Tulon odotusarvo.* Keksi esimerkki kahdesta satunnaismuuttujasta, joille

(a) $E(XY) = E(X)E(Y)$,

(b) $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.