6.1 *Kaksoissatunnainen Poisson-jakauma.* Tarkastellaan diskreettiä satunnaismuuttujaa $N : \Omega \to \mathbb{Z}_+$, jonka jakauma riippuu ulkoisesta diskreetistä satunnaismuuttujasta $L : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ siten, että N on Poisson-jakautunut parametrilla ℓ kun L saa arvon ℓ. Toisin sanoen,

$$P(N = k \,|\, L = \ell) = e^{-\ell}\frac{\ell^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

(a) Todista, että $P(N = k) = Ee^{-L}\frac{L^k}{k!}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Todista, että $EN = EL$.

6.2 *Geometrisen jakauman häntä.* Olkoon N satunnaismuuttuja, jolle $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$, missä $p = 2/3$.

(a) Laske N:n todennäköisyydet generoiva funktio G_N.

(b) Lakse N:n odotusarvo ja varianssi G_N:n avulla.

(c) Etsi Chebyshevin epäyhtälöä käyttäen yläraja todennäköisyydelle $P(N \geq a)$ missä $a = 2012$.

6.3 *Hissin luotettavuus.* Hississä on n teräsvaijeria, ja oletetaan, että hissi toimii, kun vaijereista vähintään k on ehjiä. Oletetaan, että vuoden aikana kukin vaijeri katkeaa todennäköisyydellä p muista riippumatta. Laske todennäköisyys, että hissi toimii vuoden kuluttua, kun $n = 8$, $k = 6$ ja $p = 10^{-6}$.

6.4 *Satunnainen leikkausverkko.* Satunnainen leikkausverkko $G(n, m, r)$, jossa on n solmua, muodostetaan seuraavasti. Kullakin solmu valitsee satunnaisesti ominaisuuksia m:n ominaisuuden joukosta siten, että kukin ominaisuus tulee valituksi todennäköisyydellä r muista valinnoista riippumatta. Solmut i ja j ovat naapureita, merkitään $i \leftrightarrow j$, mikäli niillä on jokin yhteinen ominaisuus. Merkitään

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{jos solmulla } i \text{ on ominaisuus } k, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Laske todennäköisyys, että mielivaltaisesti valitut solmut i ja j ovat naapureita.

6.5 *Satunnaisen leikkausverkon asteluku.* Laske satunnaisen leikkausverkon $G(n, m, r)$ mielivaltaisesti valitun solmun keskimääräinen asteluku.