Suurten lukujen laki

Lause Olkoot $X_1, X_2, \dots$ riippum. d.s.m. joille $\mathbb{E}X_i = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty \ \forall i$.

Tällöin
$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{P} \mu,$$

eli
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| > \delta\right) = 0 \quad \forall \delta > 0.$$

Tod $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Tällöin

- $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \mu$
- $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_i^n X_i\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{1}{n^2}\sum_i^n \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$\Rightarrow P(|n^{-1}S_n - \mu| > \delta) \overset{\text{Cheb.}}{\leq} \delta^{-2}\mathrm{Var}\left(\tfrac{1}{n}S_n\right) = \frac{\sigma^2}{\delta^2 n} \longrightarrow 0. \ \square$$

Monte Carlo -simulointi

- Olkoon $X: \Omega \to S \subset \mathbb{R}$ d.s.m., jolla ptnf $p_X: S \to [0,1]$.
- Olkoot $X_1, X_2, \dots$ riippum. d.s.m. jotka kaikki noudattavat jakaumaa p_X.
- $$F_s^{(n)}(\omega) := \frac{|\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i(\omega) = s\}|}{n}, \quad \omega \in \Omega, \ s \in S.$$

(Niiden d.s.m. osuus jonosta $(X_1, \dots, X_n)$, jotka saavat arvon s.)

Huom: $F_s^{(n)}$ on d.s.m.: $F_s^{(n)}: \Omega \mapsto \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$

Lause $F_s^{(n)} \xrightarrow{P} p_X(s)$ kun $n \to \infty$ $\forall s \in S$.

Tod. $A_i := \{\omega : X_i(\omega) = s\}$, $\theta_i = 1_{A_i}$.

$F_s^{(n)} = \frac{1}{n}\{1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}\}$. ; $\mathbb{E}F_s^{(n)} = p_X(s)$

riippum.

$\mathbb{E}1_{A_i} = p_X(s) \ \forall i$

$\mathrm{Var}(\theta_i) \overset{?}{=} p_X(s) - p_X(s)^2$

SLL $\Rightarrow$ $F_s^{(n)} \xrightarrow{P} p_X(s)$. $\square$

Ruletin päivätuotto (kasinolle)

- K pelaajaa
- n peliä (~~kukin~~ pelaaja pelaa n kierrosta) päivän aikana
- U_i : ruletin tulos pelissä i

  $(U_1, \ldots, U_n)$ riippum. ja tasaj. $\in \{0, \ldots, 36\}$.
- Pelaajat panostavat 1 eur punaiselle ruudulle.

  $S_{pun} = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, \ldots\}$: pun. ruudut.

  $|S_{pun}| = 18$.
- $A_i = \{$"kierroksella i saadaan punainen"$\}$

  $= \{\omega : U_i(\omega) \in S_{pun}\}$
- pelaajan k tuotto pelissä i :

  $$\Theta_i = 1_{A_i}$$

  $$X_{i,k} = 2\Theta_i - 1 = \begin{cases} +1 & \text{jos } U_i \in S_{pun} \\ -1 & \text{muuten} \end{cases},$$

- Kasinon tuotto pelissä i :

  $$Y_i = -\sum_{k=1}^{K} X_{i,k} = -\sum_{k=1}^{K} (2\Theta_i - 1) = K(1 - 2\Theta_i)$$

- Kasinon päivätuotto :

  $$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = K \sum_{i=1}^{n} (1 - 2\Theta_i)$$

- $$\mathbb{E} S_n = K \sum_{i=1}^{n} (1 - 2\mathbb{E}\Theta_i) = Kn(1-2p) = \frac{Kn}{37} \quad ; \quad \mathbb{E}\Theta_i = p = \frac{18}{37}$$

- $$\mathrm{Var}(S_n) = K^2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(1 - 2\Theta_i) = 4K^2 n \,\mathrm{Var}(\Theta_1) = 4K^2 n \, p(1-p) \approx 0.999 \cdot K^2 n$$

$$4p(1-p) = 4 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37} \approx 1.$$

(3

<u>Esim.</u> $n = 8 \cdot 60 = 480$ ← 8h ← 1 peli per 1 min

$K = 5$ (rulettipöytään mahtuu noin 6)

$$\begin{cases} \mathbb{E} S_n = \frac{Kn}{37} = 64.86 \text{ (eur)} \\ \operatorname{Var}(S_n) = 4p(1-p)K^2 n \approx 12\,000 \text{ (eur}^2) \end{cases}$$

$(\sigma_{S_n} \approx 109 \text{ (eur)})$

ii) Entä jos K pelaajaa panostavat toisistaan riippumatta eri kohteisiin?

- pun. vs. musta
- iso vs. pieni
- parillinen vs. pariton ...

Jos näin käy, niin pelaajan k tuotto pelissä i on

$$X_{i,k} = 2\theta_{i,k} - 1, \quad \text{missä } \theta_{i,k} \sim \mathrm{Ber}(p),\ p = \tfrac{18}{37}$$

$(\theta_{i,k})$ II.

Tällöin

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} (1 - 2\theta_{i,k})$$

- $\mathbb{E} S_n = Kn(1-2p) = \frac{Kn}{37}$
- $\operatorname{Var}(S_n) = Kn \operatorname{Var}(1 - 2\theta_{1,1})$

$$= Kn \cdot 4 \operatorname{Var}(\theta_{1,1})$$

$$= 4p(1-p)Kn \approx 0.999 \cdot Kn.$$

<u>Esim.</u> $\left.\begin{array}{l} n = 480 \\ K = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\mathbb{E} S_n = 64.86$ (eur)

$\operatorname{Var}(S_n) \approx 2400$ (eur²)

$\sigma_{S_n} \approx 49$ (eur)

Siis: riippumattomat pelaajat tuovat kasinolle saman keskituoton <u>pienemmällä</u> riskillä.

Pelurin vararikko (30 min)

Peluri menee kasinolle:

- alkupääoma V_0 eur, $V_0 \in \{0, \dots, n\}$,
- tavoite n eur

Kukin peli tuottaa +1 eur tn:llä p ja −1 eur tn:llä $q = 1-p$.

Pelurin pääoma t:n pelin jälkeen:

$$V_t = i + \sum_{s=1}^{t} X_s,$$

missä $X_1, X_2, \dots$ ovat riippum. d.s.m. se.

$$X_s = \begin{cases} +1 & \text{tn } p \\ -1 & \text{tn } q. \end{cases}$$

Peluri pelaa kunnes $V_t = n$ (voitto) tai $V_t = 0$ (vararikko).

$$T := \min\{t \in \mathbb{Z}_+ : V_t \in \{0, n\}\}$$

on pelin päätöshetki. Huom. T on d.s.m. joukossa $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. ((Määr. $T = \infty$ jos $V_t \notin \{0,n\}$ $\forall t$)

Mikä on voiton/vararikon tn? (ja $T < \infty$)

Merkitään $r_i = P(V_T = n \mid V_0 = i)$ pelurin voitto-tn, kun alkupääoma on i.

- Selvästi: $r_0 = 0$ ja $r_n = 1$.
- Tilasta i lähtiessä:

$$r_i = p\, r_{i+1} + q\, r_{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

p: tn(ekassa pelissä voitto); q: tn(ekka peli tappio)

Seuraa:

$$p\, r_{i+1} + q\, r_{i-1} = r_i = p\, r_i + q\, r_i$$

$$\Rightarrow \quad r_{i+1} - r_i = \frac{q}{p}(r_i - r_{i-1}) \quad \forall\, i \in [1, n-1].$$

$i=1 \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{q}{p}(r_1 - r_0) = \frac{q}{p} r_1$

$i=2 \Rightarrow r_3 - r_2 = \frac{q}{p}(r_2 - r_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 r_1$

⋮

$$\Rightarrow r_{i+1} - r_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i r_1 \quad \forall\, i \in [1, n-1].$$

$$\Rightarrow r_j - r_1 = \sum_{i=1}^{j-1}(r_{i+1} - r_i) = \left[\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i\right] r_1 \quad \forall j \in [1,n]$$

$$\Rightarrow r_j = r_1 + \left[\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i\right] r_1 = r_1 \sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i \quad \forall j \in [1,n].$$

Koska $r_n = 1$, seuraa

$$1 = r_n = r_1 \sum_{i=0}^{n-1}(q/p)^i$$

$$\Rightarrow r_1 = \left(\sum_0^{n-1}(q/p)^i\right)^{-1}.$$

$$\Rightarrow r_j = \frac{\sum_{i=0}^{j-1}(q/p)^i}{\sum_{i=0}^{n-1}(q/p)^i} \quad \forall j \in \{0,\dots,n\}$$

Lause Pelurin (jolla alkupääoma j ja tavoite n) voitto-tn on

$$r_j = \frac{\sum_0^{j-1}(q/p)^i}{\sum_0^{n-1}(q/p)^i} = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^j}{1-(q/p)^n}, & p \neq q \\ \dfrac{j}{n}, & p = q. \end{cases}$$

(Huom. $P(T<\infty) = 1$)

Esim. ~~Jallella~~ Jallella on alussa 2 eur. Millä tn:llä Jalle tuplaa omaisuutensa pelissä, missä $p = 60\%$?

$$r_2 = \frac{1-\left(\frac{0.4}{0.6}\right)^2}{1-\left(\frac{0.4}{0.6}\right)^4} = \frac{1-(2/3)^2}{1-(2/3)^4} = \frac{5/9}{65/81} = \frac{45}{65} = \frac{9}{13} \approx 69\%$$

Ahne peluri (15 min)

Alkupääoma i eur. Tavoite $n \to \infty$.

Mitä tapahtuu?

(i) Jos $p = q$, $r_i = \frac{i}{n} \longrightarrow 0$, kun $n \to \infty$.

Siispä reilussa pelissä ahneen pelurin voitto-tn lähestyy nollaa.

(ii) Jos $p < q$, $r_i = \dfrac{(q/p)^i - 1}{(q/p)^n - 1} \longrightarrow 0$, kun $n \to \infty$.

~~Jos~~ Epäsuotuisassa pelissä ahneen pelurin voitto-tn lähestyy nollaa.

(iii) Jos $p > q$, $r_i = \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^n} \longrightarrow 1-(q/p)^i \in (0,1)$.

Suotuisassa pelissä on mahdollista rikastua lopullisesti (tn:llä $1-(q/p)^i$) tai mennä vararikkoon (tn:llä $(q/p)^i$)

Esim. Jallella on alussa 2 eur. Millä tn:llä Jalle rikastuu lopullisesti pelissä, missä $p = 60\%$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(2/3)^2}{1-(2/3)^n} = 1-(2/3)^2 = 5/9 = 56\%.$$

Esim. Entä jos Jallella aluksi 1 eur?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(2/3)^1}{1-(2/3)^n} = 1-(2/3)^1 = 1/3 = 33\%.$$