Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA280 Stokastiikan perusteet

Laskuharjoitus 1
4–5.11.2013
L. Leskelä / M. Kuronen

1.1 *Tn-mitan perusominaisuudet.* Todista, että numeroituvan otosavaruuden mielivaltaiselle tn-mitalle P pätee:

(a) $P(\emptyset) = 0$,

(b) $P(A^c) = 1 - P(A)$,

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(d) $0 \leq P(A) \leq 1$,

(e) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$,

(f) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

1.2 *Äärellisen ja äärettömän joukon tasajakauma.*

(a) Todista, että äärellisen joukon Ω tasajakauma $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ on tn-funktio.

(b) Viiden kortin pokerikättä mallinnetaan joukon $\Omega = K^{(5)}$ tasajakaumalla, missä $K^{(5)} = \{A \subset K : |A| = 5\}$ on korttipakan $K = \{1, 2, \ldots, 52\}$ viiden alkion suuruisten osajoukkojen kokoelma. Laske otoksen $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ todennäköisyys $P(\omega)$.

(c) Halutaan poimia satunnainen luku joukosta $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ siten, että jokainen luku on yhtä todennäköinen. Onko tällainen valinta mahdollista suorittaa? Mikä tällöin on todennäköisyys, että saadaan luku 7?

1.3 *Tasajakaumien tulo.* Olkoon tn-funktio μ_1 äärellisen joukon S_1 tasajakauma ja tn-funktio μ_2 äärellisen joukon S_2 tasajakauma. Onko $\mu_1 \times \mu_2$ tällöin myös tasajakauma? Todista väite oikeaksi tai anna vastaesimerkki.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

1.4 *Sattuman taksonomia.* Selaa läpi David Aldousin verkkosivulla

`http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Real-World/100.html`

listattuja esimerkkejä sattuman kokemisesta ja havaitsemisesta reaalimaailmassa.

(a) Keksi 3–5 luokkaa, mihin satunnaisuuden eri ilmentymiä voidaan luokitella. Luokitteluperusteet voit vapaasti itse keksiä.

(b) Onko mielestäsi mahdollista luokitella Aldousin lista järkevästi 3–5 kategoriaan?

(c) Jos olet sitä mieltä, että luokittelu ei ole mahdollista, perustele miksi.

1.5 *Gibbsin jakauma.* Olkoon H positiivinen (eli $H \geq 0$) funktio äärellisessä joukossa $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ja $\beta \geq 0$. Määritellään

$$P(\omega) = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

missä $Z_\beta = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-\beta H(\omega)}$. Tn-funktio P on energiafunktion H määräämä *Gibbsin jakauma.* Luku $1/\beta$ vastaa monissa tilastollisen fysiikan malleissa lämpötilaa.

(a) Todista, että P on Ω:n tn-funktio.

(b) Millainen Gibbsin jakauma saadaan, kun $\beta = 0$?

(c) Oletetaan, että funktiolla H on yksikäsitteinen minimiarvo pisteessä ω_1 ja yksikäsitteinen maksimiarvo pisteessä ω_n. Tutki, miten tn-funktio P käyttäytyy, kun $\beta \to \infty$.