Jyväskylän yliopisto	**Laskuharjoitus 2**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos	11–12.11.2013
MATA280 Stokastiikan perusteet	L. Leskelä / M. Kuronen

2.1 *Sama syntymäpäivä.* Luokassa on 23 oppilasta. Olkoon X_i luku, joka kertoo monentenako vuoden päivänä oppilas i on syntynyt. Oletetaan, että $X_1, \dots, X_{23}$ ovat riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $\{1, 2, \dots, 365\}$. Mikä on todennäköisyys, että joillakin luokan oppilaista on sama syntymäpäivä?

2.2 *Satunnaisbittien summa ja tulo.* Olkoot $\theta_1, \dots, \theta_n$ riippumattomia Bernoulli-jakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $p \in (0, 1)$, eli $\mathbb{P}(\theta_i = 1) = p$ ja $\mathbb{P}(\theta_i = 0) = 1 - p$ kaikilla i. Selvitä seuraavien satunnaismuuttujien jakaumat:

(a) $X = \theta_1 + \theta_2$,

(b) $Y = \theta_1\theta_2$,

(c) $Z = \theta_1 + \cdots + \theta_n$,

(d) $W = \theta_1 \cdots \theta_n$.

2.3 *Satunnaisbittien max ja min.* Olkoot B_1 ja B_2 riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $\{0, 1\}$. Määritellään $X = \min\{B_1, B_2\}$ ja $Y = \max\{B_1, B_2\}$. Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippuvia vai riippumattomia? Perustele vastauksesi tarkasti.

2.4 *Ehdolliset todennäköisyydet.* Symmetristä noppaa heitetään kaksi kertaa ja saatuja silmälukuja merkitään X_1 ja X_2. Tällöin siis X_1 ja X_2 ovat riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja joukossa $\{1, 2, \dots, 6\}$. Muotoile X_1:n ja X_2:n avulla esimerkkejä tapahtumista A ja B, missä

(a) $\mathbb{P}(A \,|\, B) < \mathbb{P}(A)$,

(b) $\mathbb{P}(A \,|\, B) = \mathbb{P}(A)$,

(c) $\mathbb{P}(A \,|\, B) > \mathbb{P}(A)$.

2.5 *Kolmikon ja parien riippumattomuus.* Olkoot X_1, X_2, X_3 diskreetillä tn-avaruudella (Ω, P) määriteltyjä satunnaisia kokonaislukuja. Ovatko seuraavat väittämät totta vai tarua? Todista väittämät oikeiksi tai perustele ne vääriksi antamalla vastaesimerkki.

(a) Jos satunnaismuuttujat X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumattomat, niin tällöin myös satunnaismuuttujat X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$.

(b) Jos X_i, X_j ovat keskenään riippumattomat kaikilla $i \neq j$, niin tällöin myös X_1, X_2, X_3 ovat keskenään riippumatomat.