

Vastaukset tulee palauttaa paperiversiona tai skannattuna pdf:nä oman harjoitusryhmän opettajalle **ti 19.11.2013 puoleenpäivään** mennessä.

3.1 *Muunnosten odotusarvoja.* Olkoot X ja Y riippumattomia tasajakautuneita satunnaislukuja joukossa $\{1, 2, 3\}$. Laske seuraavien satunnaislukujen odotusarvot:

- (a) $X + Y$
- (b) $X - Y$
- (c) XY
- (d) X/Y
- (e) X^Y
- (f) $\sin(\pi/X) \cos(\pi/Y)$

3.2 *Tulon odotusarvo.* Keksi esimerkkejä satunnaismuuttujista, jolle

- (a) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
- (b) $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

3.3 *Diskreetin jakauman simulointi satunnaisbiteillä.* Olkoon $\theta_1, \theta_2, \dots$ riippumaton satunnainen bittijono, jossa θ_i on tasajakautunut joukossa $\{0, 1\}$. Olkoon $\phi : \{0, 1\}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ jokin funktio ja määritellään $X_1 = \phi(\theta_1, \dots, \theta_4)$, $X_2 = \phi(\theta_5, \dots, \theta_8)$, $X_3 = \phi(\theta_9, \dots, \theta_{12})$, jne.

- (a) Todista, että satunnaismuuttujat X_1, X_2, \dots ovat riippumattomia.
- (b) Anna esimerkki funktiosta ϕ , jolle X_1, X_2, \dots noudattavat joukon $\{1, \dots, 16\}$ tasajakaumaa.
- (c) Anna esimerkki funktiosta ϕ , jolle X_1, X_2, \dots noudattavat joukon $\{0, 1\}$ jakaumaa μ , missä $\mu(1) = 1/16$.
- (d) Onko olemassa funktiota ϕ , jolle X_1, X_2, \dots noudattavat joukon $\{1, 2, 3\}$ tasajakaumaa?

Jatkuu seuraavalla sivulla. . .

3.4 *Riippumattomat geometriset satunnaismuuttujat.* Joukon $\{1, 2, \dots\}$ geometrisen jakauma onnistumis-t:n:llä p on tn-funktio

$$\mu(k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Olkoon X ja Y riippumattomia geometrista jakaumaa noudattavia satunnaislukuja onnistumistodennäköisyyksin p ja q . Merkitään $Z = \min(X, Y)$.

- (a) Todista, että $\mathbb{P}(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$ ja $\mathbb{P}(Y \geq k) = (1 - q)^{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$.
- (b) Todista a)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että $\mathbb{P}(Z \geq k) = (1 - r)^{k-1}$ kaikilla $k \geq 1$ ja määritä luku r , jolle näin pätee.
- (c) Todista b)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että satunnaisluku Z noudattaa geometrista jakaumaa onnistumis-t:n:llä r .

3.5 *Apina kirjailijana.* Apina istuu tietokoneen ääressä ja lyö umpimähkään 50-merkkistä näppäimistöä (josta caps lock poistettu).

- (a) Oletetaan, että apina tuottaa vuoden aikana tekstin, jossa on sata miljoonaa merkkiä. Kuinka monta kertaa sana ”kivi” keskimäärin esiintyy tekstissä?
- (b) Seitsemän veljestä -teoksessa on 635 864 merkkiä. Kuinka pitkä teksti apinan tulee kirjoittaa, jotta kyseisen teoksen sanatarkka toisinto (isot kirjaimet unohtaen) esiintyy tekstissä keskimäärin vähintään yhden kerran?