4.1 *Indikaattorisatunnaismuuttuja.* Diskreetin tn-avaruuden (Ω, P) tapahtuman $A \subset \Omega$ *indikaattori* on $\{0,1\}$-arvoinen satunnaismuuttuja

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Selvitä 1_A:n jakauma.

(b) Laske 1_A:n odotusarvo ja varianssi.

(c) Selvitä satunnaismuuttujan $Z = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$ jakauma, kun oletetaan, että $1_{A_1}, 1_{A_2}, \ldots, 1_{A_n}$ ovat riippumattomat.

(d) Laske Z:n odotusarvo ja varianssi.

4.2 *Valtterin rulettipeli.* Valtteri pelaa 300 kierrosta rulettia panostaen kullakin kierroksella yhden euron pienille luvuille (1–18). Valtterin alkupääoma on $V_0 = 300$ euroa. Merkitään Valtterin pelitilin arvoa t:n pelikierroksen jälkeen symbolilla V_t.

(a) Olkoon $U_1, \ldots, U_{300}$ riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia joukossa $S = \{0, 1, \ldots, 36\}$. Määrittele funktio f, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + \sum_{s=1}^{t} f(U_s).$$

(b) Mikä on satunnaismuuttujan V_{300} arvojoukko?

(c) Laske a)-kohdan tulosta apuna käyttäen odotusarvo $\mathbb{E}V_{300}$.

(d) Olkoon θ_s tapahtuman $\{U_s \in [1, 18]\}$ indikaattorisatunnaismuuttuja. Perustele, miksi θ_s noudattaa $\mathrm{Ber}(p)$-jakaumaa jollain p ja laske p:n arvo.

(e) Määrittele funktio g, jonka avulla pelitilin arvo t:n pelikierroksen jälkeen voidaan esittää muodossa

$$V_t = V_0 + g\left(\sum_{s=1}^{t} \theta_s\right).$$

(f) Todista e)-kohdan tulosta apuna käyttäen, että

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_{300} - V_0}{V_0} \geq 0.1\right) = \sum_{k=j}^{300} \binom{300}{k} p^k (1-p)^{300-k}$$

eräällä j:n arvolla ja määritä j.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

4.3 *Nicon rulettipeli.* Nico pelaa 300 kierrosta rulettia, panostaen kullakin kierroksella yhden euron luvulle 28. Nicon alkupääoma on $V_0 = 300$ euroa. Vastaa Nicon pelin osalta samoihin kysymyksiin kuin tehtävässä 4.2, kun tehtävän 4.2 d)-kohdassa θ_s:n määritelmä muutetaan vastaamaan tapahtuman $\{U_s = 28\}$ indikaattoria.

4.4 *Pelurin vararikko.* Heikki menee kasinolle tavoitteenaan kerryttää pääomansa tasolle n EUR uhkapelissä, missä kukin pelikierros muista riippumatta tuottaa +1 EUR tn:llä p ja -1 EUR tn:llä $q = 1-p$. Heikin alkupääoma on i EUR ja hän on päättänyt pelata, kunnes joko saavuttaa tavoitteensa tai häviää kaikki rahansa. Olkoon r_i tn, että peli päättyy Heikin saavuttaessa tavoitteensa. Luennolla perusteltiin, että $r_0 = 0$, $r_n = 1$ ja

$$r_i = pr_{i+1} + qr_{i-1}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Ratkaise r_i tästä yhtälöryhmästä.

4.5 *Suurten lukujen laki ei aina toteudu.* Tarkastellaan kahta riippumatonta kokoelmaa satunnaismuuttujia, joille pätee

- $\{X_1, X_2, \ldots\}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
- $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja $\mathbb{E}(Y_1) = 2$.

Heitetään aluksi kolikkoa ja määritellään

$$S_n = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_n, & \text{jos saadaan kruuna,} \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, & \text{jos saadaan klaava.} \end{cases}$$

Näytä, että

(a) $\mathbb{E}(S_n/n) = 3/2$.

(b) $\mathbb{P}(|S_n/n - 3/2| > 1/4)$ ei suppene nollaan kun n kasvaa.

(c) Onko ylläoleva havainto ristiriidassa suurten lukujen lain kanssa?