Jyväskylän yliopisto **Laskuharjoitus 5**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos 2–3.12.2013
MATA280 Stokastiikan perusteet L. Leskelä / M. Kuronen

**5.1** *Tngf:n yleisominaisuudet.* Olkoon $X$ jokin $\mathbb{Z}_+$-arvoinen satunnaisluku ja $G_X$ sen todennäköisyydet generoiva funktio.

(a) Perustele, miksi $G_X$ on aina määritelty joukossa $[-1, 1]$.

(b) Todista, että $G_X$ kuvaa välin $[-1, 1]$ itselleen.

(c) Laske $G_X(0)$ ja $G_X(1)$.

(d) Osaatko sanoa, mitä luku $G_X(-1)$ kertoo $X$:n jakaumasta?

**5.2** *Poisson-jakauma.* Olkoon $X$ Poisson-jakautunut satunnaisluku parametrilla $\lambda > 0$, eli

$$\mathbb{P}(X = k) \; = \; e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

(a) Laske $X$:n todennäköisyydet generoiva funktio $G_X$.

(b) Mille $t$:n arvoille $G_X(t)$ on määritelty?

(c) Laske $X$:n odotusarvo suoraan $X$:n jakaumasta.

(d) Laske $X$:n odotusarvo $G_X$:n avulla.

(e) Kumpi tapa oli helpompi?

(f) Laske $X$:n varianssi.

**5.3** *Lastenlasten lkm.* Rouva Galton saa elinaikanansa $N$ lasta, missä

$$\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ja $p \in (0, 1)$. (Sanotaan, että $N$ noudattaa joukon $\{0, 1, 2, \dots\}$ geometrista jakaumaa.) Oletetaan, että kukin lapsi tuottaa muista riippumatta satunnaisen määrän lapsia, joka on samoin jakautunut kuin $N$. Laske

(a) lasten lukumäärän tngf ja odotusarvo,

(b) lastenlasten lukumäärän tngf ja odotusarvo,

(c) tn, että rouva Galton saa vähintään kaksi lastenlasta.

*Jatkuu seuraavalla sivulla. . .*

**5.4** *Kaksoissatunnainen Poisson-jakauma.* Tarkastellaan satunnaislukua $N : \Omega \to \mathbb{Z}_+$, jonka jakauma riippuu ulkoisesta satunnaismuuttujasta $L : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ siten, että $N$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\ell$, kun $L$ saa arvon $\ell$. Toisin sanoen,

$$\mathbb{P}(N = k \,|\, L = \ell) \;=\; e^{-\ell}\frac{\ell^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

(a) Todista, että $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}e^{-L}\frac{L^k}{k!}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Laske $\mathbb{E}N$, kun oletetaan, että $\mathbb{E}L = \log 2$.

**5.5** *Monen alkuyksilön haarautumisprosessi.* Yhden alkuyksilön haarautumisprosessi määriteltiin luennolla rekursiivisesti kaavoilla $Z_0 = 1$ ja

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

missä satunnaisluvut $(X_{n,i})_{i\geq 1, n\geq 1}$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa jakaumaa kuin geneerinen $\mathbb{Z}_+$-arvoinen satunnaisluku $X$. Luennolla todistettiin, että luvun $Z_n$ tngf saadaan kaavasta

$$G_{Z_n}(t) = G_X \circ \cdots \circ G_X(t), \quad n \geq 1,$$

missä oikealla on $X$:n tngf:n yhdistetty kuvaus itsensä kanssa $n$ kertaa.

(a) Johda ylläolevaa tulosta apuna käyttäen lauseke $Z_n$:n tngf:lle yleistetyssä tapauksessa, missä alkupopulaatiossa on kolme yksilöä, jotka toisistaan riippumatta lisääntyvät kuten yhden alkuyksilön populaatio.

(b) Osaatko yleistää a)-kohdan tuloksen tapaukseen, missä alkupopulaatiossa on satunnainen lukumäärä $Y$ yksilöä?