

6.1 *Haarautumisprosessin sukupuutto.* Tarkastellaan haarautumisprosessia, missä kukin yksilö toisista riippumatta saa nolla jälkeläistä tn:llä $1/8$, yhden jälkeläisen tn:llä $1/2$, ja kaksi jälkeläistä tn:llä $3/8$.

- (a) Laske jälkikasvun lukumäärän todennäköisyydet generoiva funktio $G_X(t)$.
- (b) Etsi yhtälön $G_X(t) = t$ ratkaisut.
- (c) Laske todennäköisyys, että populaatio kuolee sukupuuttoon.

6.2 *Päiväkot.* Päiväkodissa on 10 poikaa ja 10 tyttöä. Oletetaan, että kukin poikapari muista lapsipareista riippumatta ystävästyy tn:llä $1/2$, kukin tyttöpari tn:llä $1/3$ ja kukin tyttö–poika-pari tn:llä $1/20$.

- (a) Laske valitun tytön kavereiden lukumäärän odotusarvo ja tngf.
- (b) Laske valitun pojan kavereiden lukumäärän odotusarvo ja tngf.
- (c) Laske tn, että valitulla tytöllä on vähintään 2 ystävää.
- (d) Laske tn, että valitut 3 poikaa muodostavat klikin, eli kaikki ovat toistensa ystäviä.

6.3 *Riippumattomasti kytketty satunnaisverkko.* Tarkastellaan n :n solmun $V = \{1, \dots, n\}$ muodostamaa satunnaisverkkoa, missä kukin solmupari on muista pareista riippumatta kytketty tn:llä p . Merkitään solmun x naapureiden joukkoa symbolilla

$$N(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$$

ja naapurinnaapureiden joukkoa symbolilla

$$N_2(x) = \bigcup_{y \in N(x)} N(y) \setminus \{x\}.$$

- (a) Selvitä solmun x asteen $|N(x)|$ jakauma. Riippuuko se x :n valinnasta?
- (b) Selvitä $|N(x)|$:n odotusarvo.
- (c) Laske tapahtuman $|N(x) \cup N_2(x)| \leq 2$ todennäköisyys.

6.4 *Facebook-juorut.* Vanhat luokkatoverit Aada, Bertta ja Cecilia muodostavat Facebook-kaverisuhteita satunnaisesti siten, että kukin pari linkittyy keskenään muista riippumatta todennäköisyydellä $p = 0.9$. Mikäli joku kolmikosta kuulee juorun, välittää hän sen heti kaikille Facebook-kavereillensa eteenpäin. Jos Aada kuulee juorun, mikä on todennäköisyys että:

- (a) Cecilia kuulee sen?
- (b) Cecilia kuulee sen, jos Aada ja Bertta eivät ole Facebook-kavereita?
- (c) Cecilia kuulee sen, jos hän ei ole Aadan Facebook-kaveri?

6.5 *Satunnainen leikkausverkko.* Olkoot $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ erillisiä joukkoja. Satunnainen kaksijakoinen verkko B solmujoukolla $V \cup W$ määritellään seuraavasti: kukin solmupari vw , missä $v \in V$ ja $w \in W$, kytketään toisiinsa muista solmupareista riippumatta tn:llä r . Kaksijakoista verkkoa B vastaava satunnainen leikkausverkko on verkko $G = (V(G), E(G))$, missä $V(G) = V$ ja

$$E(G) = \{v_i v_j \in V^{(2)} : v_i w \in E(B) \text{ ja } v_j w \in E(B) \text{ jollain } w \in W\}.$$

- (a) Laske tn, että solmupari $v_1 v_2$ on kytketty satunnaisessa leikkausverkossa G .
- (b) Laske solmun v_1 asteen odotusarvo satunnaisessa kaksijakoisessa verkossa B .
- (c) Laske solmun v_1 asteen odotusarvo satunnaisessa leikkausverkossa G .