Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS260 Todennäköisyysteoria 1

Laskuharjoitus 2
Ti 28.1.2014
L. Leskelä & M. Kuronen

2.1 *Summaestimaatti.* Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tn-avaruus.

(a) Todista, että mielivaltaisille $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ pätee

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i). \tag{1}$$

(b) Anna esimerkki tapauksesta, missä (1) pätee yhtälönä.

(c) Anna esimerkki tapauksesta, missä epäyhtälö (1) on aito.

(d) Yleistyykö (1) numeroituvasti äärettömille yhdisteille?

2.2 *Indikaattorisatunnaismuuttuja.* Olkoon X tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ määritelty reaaliarvoinen satunnaismuuttuja eli *satunnaisluku.* Joukon $A \subset \Omega$ *indikaattori* on kuvaus $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$, jolle $1_A(\omega) = 1$ täsmälleen silloin kun $\omega \in A$.

(a) Todista, että 1_A on satunnaisluku, kun $A \in \mathcal{F}$.

(b) Todista, että $X1_A$ on satunnaisluku, kun $A \in \mathcal{F}$.

(c) Onko $X1_A$ satunnaisluku, jos $A \notin \mathcal{F}$?

2.3 *Tn-mittojen järjestäminen.* Olkoot $\mathbb{P}_1$ ja $\mathbb{P}_2$ tn-mittoja $(\Omega, \mathcal{F})$:llä, joille pätee

$$\mathbb{P}_1(A) \le \mathbb{P}_2(A) \quad \text{kaikilla } A \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

(a) Todista, että $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

(b) Päteekö (a)-kohdan tulos, mikäli oletetaan että (2) pätee vain kaikilla $A \in \mathcal{A}$, missä $\mathcal{A}$ on algebra, jolle $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$?

(c) Päteekö (a)-kohdan tulos, mikäli oletetaan että (2) pätee vain kaikilla $A \in \mathcal{I}$, missä $\mathcal{I}$ on π-luokka, jolle $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$?

2.4 *Tulosigma-algebra.* Olkoon $\mathcal{F}_i$ joukon Ω_i sigma-algebra, $i = 1, 2$. Avaruuden $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ tulosigma-algebra määritellään kaavalla $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, missä

$$\mathcal{A}_1 = \{B_1 \times \Omega_2 : B_1 \in \mathcal{F}_1\},$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\Omega_1 \times B_2 : B_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

Todista, että $\mathcal{I} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{F}_1,\, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$ on sigma-algebran $\mathcal{F}$ virittävä π-luokka.

2.5 *Borel-joukon katkaisu.* Todista, että $A \cap (0, 1] \in \mathcal{B}_{(0,1]}$, kun $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$.