Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS260 Todennäköisyysteoria 1

Laskuharjoitus 3
Ti 4.2.2014
L. Leskelä & M. Kuronen

3.1 *Satunnaisluvun kertymäfunktio.* Satunnaisluvun $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kertymäfunktio F_X määritellään kaavalla $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$. Todista, että

(a) F_X on kasvava,

(b) F_X on oikealta jatkuva,

(c) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

3.2 *Satunnaisvektorin jakauma ja kertymäfunktio.* Satunnaisvektorin $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ jakauma P_X määritellään kaavalla $P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, ja kertymäfunktio F_X kaavalla $F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

(a) Todista, että X:n jakauma on tn-mitta avaruudessa $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.

(b) Todista, että X:n jakauman määrää sen kertymäfunktio.

3.3 *Annettua kertymäfunktiota vastaavan satunnaisluvun rakentaminen.* Satunnaisluku $U : \Omega \to \mathbb{R}$ on tasajakautunut välillä $(0,1)$, mikäli sen kertymäfunktiolle pätee $F_U(x) = x$ kaikilla $x \in [0,1]$. Olkoon X mielivaltainen satunnaisluku ja F_X sen kertymäfunktio.

(a) Oletetaan, että $F_X : \mathbb{R} \to (0,1)$ on bijektio ja merkitään symbolilla F_X^{-1} sen käänteisfunktiota. Todista, että satunnaisluvulla $F_X^{-1}(U)$ on sama jakauma kuin X:llä. (Vihje: Tehtävän 3.2 (b)-kohta.)

(b) Lue Sottisen monisteen sivulta 23, miten (a)-kohdan tulos yleistyy mielivaltaiselle satunnaisluvulle, jonka kertymäfunktio ei välttämättä ole kääntyvä. Valmistaudu esittämään taululle yhteenveto kyseisen sivun päättelystä.

3.4 *Äärellistilaisen satunnaisluvun oa.* Olkoon X äärellistilainen satunnaisluku.

(a) Perustele, miksi esitys $X = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ei ole yksikäsitteinen.

(b) Perustele, miksi X:n oa. on silti hyvin määritelty kaavalla

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(A_i),$$

eli yllä olevan yhtälön vasen puoli ei riipu X:n esityksen valinnasta.

3.5 *Varmat tapahtumat ja odotusarvon nollautuminen.* Olkoon $X \ge 0$ positiivinen satunnaisluku tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja $A_n \in \mathcal{F}$.

(a) Todista, että jos $\mathbb{P}(A_n) = 1$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, niin myös $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^\infty A_n) = 1$.

(b) Todista suoraan positiivisen satunnaisluvun odotusarvon määritelmän pohjalta, että jos $\mathbb{E}X = 0$, niin tällöin $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. (Vihje: (a)-kohdasta voi olla apua.)