Jyväskylän yliopisto | **Laskuharjoitus 4**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ti 11.2.2014
MATS260 Todennäköisyysteoria 1 | L. Leskelä & M. Kuronen

4.1 *Jatkuvia jakaumia.* Olkoon X satunnaisluku, jolla on jatkuva jakauma tiheysfunktionaan f_X. Selvitä X:n odotusarvo ja varianssi, kun

(a) $f_X(x) = (b-a)^{-1} 1_{(a,b)}(x)$, missä $a < b$,

(b) $f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1} 1_{(1,\infty)}(x)$, missä $\alpha > 0$,

4.2 *Satunnaisluvun itseisarvo.* Olkoon $Y = |X|$, missä X on satunnaisluku, jonka jakaumana on $\mathbb{P}_X$.

(a) Todista, että Y on positiivinen satunnaisluku.

(b) Todista, että Y on integroituva jos ja vain jos X on integroituva.

(c) Oletetaan, että X:n kertymäfunktio $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ tunnetaan. Selvitä Y:n kertymäfunktio F_X:n avulla.

(d) Oletetaan, että X:llä on jatkuva jakauma tiheysfunktionaan $f_X(x)$. Onko Y:n jakauma tällöin myös jatkuva? Jos on, niin esitä Y:n tiheysfunktio X:n avulla.

4.3 *Diskreetti satunnaisluku.* Satunnaisluku X on *diskreetti*, jos sen tilajoukko $X(\Omega)$ on numeroituva. Diskreetin satunnaisluvun tn-funktio $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ määritellään kaavalla $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$. Todista, että diskreetille satunnaisluvulle X pätee:

(a) $\mathbb{E}h(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x) p_X(x)$ kaikilla Borel-funktiolla $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee joko $h \ge 0$ tai $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathbb{P}_X)$.

(b) $h(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \iff h \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathbb{P}_X) \iff \sum_{x \in X(\Omega)} |h(x)| p_X(x) < \infty$.

4.4 *Odotusarvon itseisarvo.* Todista, että $|\mathbb{E}X| \le \mathbb{E}|X|$ jokaiselle integroituvalle satunnaisluvulle X.

4.5 *Melkein varma yhtäsuuruus.* Olkoot X, Y satunnaislukuja, jotka ovat melkein varmasti yhtäsuuria, eli pätee $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Todista, että $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$, kun oletetaan, että

(a) X ja Y ovat yksinkertaisia (eli äärellistilaisia),

(b) X ja Y ovat positiivisia,

(c) X ja Y ovat integroituvia.

(d) Perustele vielä, miksi $\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$ on mitallinen joukko.

(e) Voidaanko X:n ja Y:n jakaumista päätellä jotain oletuksen $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ valossa?