5.1 *Satunnaisvektorin virittämä sigma-algebra.* Olkoon X jokin $\mathbb{R}^d$-arvoinen satunnaisvektori tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Merkitään

$$X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}.$$

Todista, että

(a) $X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ on sigma-algebra
(b) $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$,
(c) kaikilla $F \in \sigma(X)$ on olemassa jokin $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, jolle pätee $F = X^{-1}(B)$.

5.2 *Riippumattomien satunnaislukujen summa.* Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaislukuja. Onko mahdollista, että $\mathbb{P}(X + Y = 7) = 1$?

5.3 *Riippumattomuus ja deterministiset funktiot.* Olkoot $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ja $Y : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ satunnaisvektoreita. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(i) $X \perp\!\!\!\perp Y$.
(v) $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ kaikilla Borel-funktioilla $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}$.

Luennoilla todistettiin (i) $\implies$ (v). Todista sinä (v) $\implies$ (i).

5.4 *Riippumattomien bittien tulo.* Olkoon $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ riippumaton kokoelma satunnaislukuja, joille pätee $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = +1) = 1/2$ kaikilla n. Määritellään satunnaisluvut $Z_0, Z_1, \dots$ kaavalla

$$Z_n = X_0 X_1 \cdots X_n, \quad n \geq 0.$$

(a) Ovatko Z_0 ja Z_1 riippumattomat?
(b) Ovatko Z_0 ja Z_2 riippumattomat?
(c) Onko kokoelma $\{Z_0, Z_1, Z_2\}$ riippumaton?
(d) Onko kokoelma $\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ riippumaton?

5.5 *Riippumattomuus ja odotusarvot.* Olkoot $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ja $Y : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ satunnaisvektoreita. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(i) $X \perp\!\!\!\perp Y$.
(vi) $\mathbb{E}f(X)g(Y) = \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(Y)$ kaikilla rajoitetuilla Borel-funktioilla $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ ja $g : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}_+$.
(vii) $\mathbb{E}f(X)g(Y) = \mathbb{E}f(X)\mathbb{E}g(Y)$ kaikilla positiivisilla Borel-funktioilla $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ ja $g : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}_+$.

Luennoilla todistettiin (i) $\implies$ (vii). Viimeistele todistus näyttämällä todeksi implikaatiot (vii) $\implies$ (vi) ja (vi) $\implies$ (i).