Jyväskylän yliopisto	**Laskuharjoitus 6**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos	Ti 25.2.2014
MATS260 Todennäköisyysteoria 1	L. Leskelä & M. Kuronen

6.1 Olkoon $X = (X_1, X_2)$ $\mathbb{R}^2$-arvoinen satunnaisvektori, jolla on tn-tiheysfunktio

$$f_X(x_1, x_2) = 2\,1_A(x_1, x_2),$$

missä A on suljettu kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$.

(a) Mikä on satunnaisluvun X_1 jakauma?

(b) Mikä on satunnaisluvun X_2 jakauma?

(c) Ovatko X_1 ja X_2 riippuvia vai riippumattomia?

6.2 Olkoot X_1, X_2, X_3 riippumattomia Exp(λ)-jakaumaa noudattavia satunnaislukuja, eli kullakin on tiheysfunktio $f(x) = 1(x > 0)\lambda e^{-\lambda x}$, missä $\lambda > 0$. Selvitä seuraavien satunnaislukujen kertymäfunktiot:

(a) $\min(X_1, X_2, X_3)$,

(b) $X_1 + X_2 + X_3$,

(c) $\max(X_1, X_2, X_3)$.

Tunnistatko nimeltä yllämainittujen satunnaislukujen jakaumat?

6.3 Keksi esimerkki satunnaisluvuista X ja Y, jotka ovat riippuvia, mutta silti pätee $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$.

6.4 *Monen satunnaismuuttujan virittämä sigma-algebra.* Olkoot X_i, $i \in I$ satunnaismuuttujia tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, missä indeksijoukko I on numeroituva. Kyseisen kokoelman virittämä sigma-algebra määritellään kaavalla

$$\sigma(X_i : i \in I) = \sigma(\cup_{i \in I} \sigma(X_i)).$$

(a) Onko kokoelma $\cup_{i \in I} \sigma(X_i)$ sigma-algebra? Perustele miksi.

(b) Olkoon $\mathcal{I}$ se kokoelma $\mathcal{F}$:n joukkoja, jotka voidaan lausua äärellisinä leikkauksina kokoelman $\cup_{i \in I} \sigma(X_i)$ jäsenistä. Todista, että $\mathcal{I}$ on π-luokka, joka virittää $\sigma(X_i : i \in I)$:n.

6.5 *Riippumattoman satunnaisjonon häntä-sigma-algebrat.* Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia. Määritellään $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ja $\mathcal{G}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.

(a) Todista, että sigma-algebrat $\mathcal{F}_n$ ja $\mathcal{G}_n$ ovat riippumattomat. (**Vihje:** Tehtävä 6.4)

(b) Todista, että $f(X_1, \ldots, X_m)$ ja $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ ovat riippumattomat kaikilla $m < n$ ja kaikilla rajoitetuilla Borel-funktioilla $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$.