Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS262 Stokastiikka 1

Laskuharjoitus 1
Ti 20.3.2012
L. Leskelä

1.1 *Diskreetit satunnaismuuttujat.* Olkoon P tasajakauma äärellisessä joukossa $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, eli

$$P(A) = n^{-1}|A|, \quad A \subset \Omega,$$

missä $|A|$ on A:n alkioiden lukumäärä. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla $U(\omega) = \omega$ sekä $X = U^2$. Laske U:n ja X:n

(a) pistetodennäköisyysfunktio,

(b) jakauma,

(c) odotusarvo.

1.2 *Jatkuvat satunnaismuuttujat.* Olkoon P tasajakauma joukossa $(0, 1)$, eli

$$P(A) = \int_A dx$$

kaikilla (Borel-)mitallisilla $A \subset (0, 1)$. Määritellään satunnaismuuttujat U ja Y kaavoilla $U(\omega) = \omega$ ja $Y = -(1/\lambda) \log U$, missä $\lambda > 0$. Laske U:n ja Y:n

(a) kertymäfunktio,

(b) tiheysfunktio,

(c) jakauma,

(d) odotusarvo.

1.3 *Summaestimaatti ja jakauma.*

(a) Todista, että mielivaltaisille tapahtumille $A_1, A_2, \ldots$ pätee

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

(b) Olkoon $X = (X_1, \ldots, X_d)$ satunnaisvektori tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Näytä, että X:n jakauma

$$P_X(B) = P(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

on todennäköisyysmitta $\mathbb{R}^d$:ssä.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

1.4 *Riippumattomat tasajakautuneet satunnaismuuttujat.* Olkoot U_1 ja U_2 riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia välillä $(0, 1)$, eli molempien satunnaismuuttujien jakauma on välin $(0, 1)$ tasajakauma kuten tehtävässä 1.2. Laske seuraavien kertymäfunktio, tiheysfunktio ja jakauma:

(a) U_1U_2,

(b) U_1/U_2.

1.5 *Riippumattomien satunnaisvektoreiden kuvaukset.* Tarkastellaan jonoa satunnaisvektoreita $(X_1, X_2, \dots)$, missä $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{d_i}$. Todista, että seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

- Satunnaisvektorit $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia.
- Satunnaismuuttujat $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots$ ovat riippumattomia kaikilla mitallisilla $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \mathbb{R}$.