

**2.1** *Tunnettujen jakaumien karakteristisia funktioita.* Laske seuraavien satunnaismuuttujien karakteristiset funktiot:

- (a)  $\xi \in \{0, 1\}$ , joka on Bernoullijakautunut parametrilla  $p$ .
- (b)  $B \in \{0, 1, \dots, n\}$ , joka on binomijakautunut parametrein  $n$  ja  $p$ .
- (c)  $M \in \mathbb{R}_+$ , joka on eksponenttijakautunut ja  $EM = 1/\mu$  jollain  $\mu > 0$ .

**2.2** *Symmetrinen satunnaismuuttuja.* Satunnaismuuttuja  $X$  on *symmetrinen*, jos  $-X$ :llä on sama jakauma kuin  $X$ :llä. Näytä, että  $X$  on symmetrinen ja vain jos  $\phi_X$  on reaaliarvoinen.

**2.3** *Riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo.* Olkoot  $X$  ja  $Y$  riippumattomia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ja  $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

- (a) Näytä, että  $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .
- (b) Näytä, että

$$EXY = EX EY.$$

- (c) Yleistyvätkö nämä johtopäätökset kompleksiarvoisille satunnaismuuttujille?

**2.4** *Satunnaisen kokonaisluvun jakauman kääntökaava.* Olkoon  $Z$  kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja, jonka pistetodennäköisyysfunktio on  $p_n = P(Z = n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Näytä, että

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iun} \phi_Z(u) du, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Vihje: Jos haluat, voit ensin todistaa kaavan  $\int_0^{n\pi} \cos(t) dt = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .)

**2.5** *Karakteristinen funktio määrää jakauman.* Tarkastellaan satunnaismuuttujia  $X$  ja  $Y$ , joilla on jakaumat  $\mu_X$  ja  $\mu_Y$  sekä kertymäfunktiot  $F_X$  ja  $F_Y$ . Oletetaan, että  $X$ :n ja  $Y$ :n karakteristisille funktioille pätee  $\phi_X = \phi_Y$ .

- (a) Perustele, miksi  $F_X(b) - F_X(a) = F_Y(b) - F_Y(a)$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{R} \setminus (D_X \cup D_Y)$ , missä  $D_X$  ja  $D_Y$  ovat  $X$ :n ja  $Y$ :n kertymäfunktioiden epäjatkuvuuspisteet. (Vihje: Lévy'n kääntölause [Sottinen, L6.3.7].)
- (b) Näytä, että  $F_X(b) = F_Y(b)$  kaikilla  $b \in \mathbb{R} \setminus (D_X \cup D_Y)$ .
- (c) Näytä, että  $F_X = F_Y$  (Vihje: Kertymäfunktion epäjatkuvuuspisteitä on enintään numeroituva määrä.)
- (d) Näytä, että  $\mu_X = \mu_Y$ . (Vihje: Dynkinin laajennuslause [Sottinen, L2.3.8].)