Jyväskylän yliopisto | **Laskuharjoitus 3**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ti 10.4.2012
MATS262 Stokastiikka 1 | L. Leskelä

3.1 *Lineaarikombinaatioiden jatkuvuus.* Olkoot (X_n) ja (Y_n) satunnaisjonoja $\mathbb{R}^d$:ssä ja $a, b \in \mathbb{R}$. Mitkä seuraavista väittämistä ovat tosia:

(a) $X_n \overset{\text{m.v.}}{\to} X$ ja $Y_n \overset{\text{m.v.}}{\to} Y \implies aX_n + bY_n \overset{\text{m.v.}}{\to} aX + bY$.

(b) $X_n \overset{P}{\to} X$ ja $Y_n \overset{P}{\to} Y \implies aX_n + bY_n \overset{P}{\to} aX + bY$.

(c) $X_n \overset{L^p}{\to} X$ ja $Y_n \overset{L^p}{\to} Y \implies aX_n + bY_n \overset{L^p}{\to} aX + bY$.

3.2 *Positiivisen satunnaismuuttujan integroituvuus.* Olkoon X positiivinen satunnaismuuttuja jakaumanaan μ, eli tn-mitalle μ pätee $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$.

(a) Näytä, että $EX < \infty$ jos ja vain jos $\sum_{n \geq 0} P(X > n) < \infty$.
(**Vihje**: Kirjoita $P(X > n) = \int_{\mathbb{R}_+} 1(x > n)\, \mu(dx)$, missä $1(x > n)$ on mukava vaihtoehtoinen tapa kirjoittaa $1_{(n,\infty)}(x)$.)

(b) Osaatko tulkita summan $\sum_{n \geq 0} P(X > n)$ jonkin satunnaismuuttujan odotusarvona?

3.3 *Satunnaisjonon kasvunopeus.* Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia. Merkitään $\xi_n = O(n^\beta)$ mikäli on olemassa sellainen luku c, että $\xi_n \leq cn^\beta$ kaikilla n jostain n_0 lähtien.

(a) Näytä, että kaikilla $\alpha > 0$ ja $c > 0$, seuraavat ovat yhtäpitäviä:

- $\xi_n \leq cn^{1/\alpha}$ jostain lähtien melkein varmasti.
- $E\xi^\alpha < \infty$.

(**Vihje** Tehtävä 3.2 ja Borel–Cantelli.)

(b) Näytä, että jos $E\xi^\alpha < \infty$, niin $\xi_n = O(n^{1/\alpha})$ melkein varmasti.

(c) Näytä, että jos $E\xi^\alpha = \infty$, niin $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/\alpha}\xi_n = \infty$ melkein varmasti.

(d) Osaatko ylläolevien tulosten perusteella päätellä jotain ennätysjonon $M_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ käyttäytymisestä suurilla n?

3.4 *Melkein varma suppeneminen on myös stokastista.* Olkoon (X_n) satunnainen jono $\mathbb{R}^d$:ssä. Todista seuraava lause [Sottinen, Lause 7.3.2(i)]: Jos $X_n \to X$ melkein varmasti, niin $X_n \to X$ stokastisesti.

3.5 *Melkein varma dominoitu suppeneminen.* Osoite, että Lebesguen dominoidun suppenemisen lause [Sottinen, Lause 4.2.1(v)] pätee, kun oletamme vain, että $X_n \overset{\text{m.v.}}{\to} X$ ja $|X_n| \leq Y$ melkein varmasti kaikilla n, missä Y on integroituva satunnaismuuttuja.