

4.1 Riippumattomien summien jakaumasuppeneminen. Olkoot X, X_1, X_2, \dots ja Y, Y_1, Y_2, \dots satunnaisvektoreita \mathbb{R}^d :ssä, joille pätee:

- $X_n \xrightarrow{d} X$ ja $Y_n \xrightarrow{d} Y$,
- X ja Y ovat riippumattomia,
- X_n ja Y_n ovat riippumattomia kaikilla n .

(a) Todista, että $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

(b) Päteekö vastaava tulos ilman riippumattomuusoletuksia?

4.2 Normaalijakaumien suppeneminen. Olkoot X_1, X_2, \dots normaalijakautuneita satunnaisuuttujia, joille pätee $EX_n = \mu_n$ ja $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$ joillain $\mu_n \in \mathbb{R}$ ja $\sigma_n^2 > 0$.

(a) Laske satunnaisuuttujan X_n karakteristinen funktio.

(b) Todista, että jos $\mu_n \rightarrow \mu$ ja $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$, niin silloin $X_n \xrightarrow{d} X$, missä X on normaalijakautunut odotusarvonaan μ ja varianssinaan σ^2 .

4.3 Jatkuvan funktion stokastinen jatkuvuus. Olkoot X, X_1, X_2, \dots tn-avaruudella (Ω, \mathcal{F}, P) määriteltyjä satunnaisuuttujia ja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Todista seuraavat väittämät oikeiksi tai vääriksi:

(a) $X_n \xrightarrow{\text{m.v.}} X \implies f(X_n) \xrightarrow{\text{m.v.}} f(X)$.

(b) $X_n \xrightarrow{P} X \implies f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

(c) $X_n \xrightarrow{d} X \implies f(X_n) \xrightarrow{d} f(X)$.

4.4 Stokastisesti suppeneva jono suppenee jakaumaltaan. Todista, että $X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$.

4.5 Satunnaisen vektorijonon tiukkuus. Sanotaan että jono satunnaisvektoreita $(X^{(n)})$ tn-avaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) on tiukka, jos vastaava jakaumajono $\mu_n = P(X^{(n)} \in \cdot)$ on tiukka. Todista, että \mathbb{R}^d :n satunnainen vektorijono $(X^{(n)}) = ((X_1^{(n)}, \dots, X_d^{(n)}))$ on tiukka jos ja vain jos jono $(X_k^{(n)})$ on tiukka kaikilla $k = 1, \dots, d$.