Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS262 Stokastiikka 1

Laskuharjoitus 5
Ti 24.4.2012
L. Leskelä

5.1 *Vahva suurten lukujen laki.* Olkoon (X_n) jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $E|X_1| < \infty$, ja merkitään $\mu = EX_1$. Luennoilla näytimme, että jos $\mu = 0$, niin

$$n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n) \to \mu \quad \text{melkein varmasti.}$$

Yleistä tämä tulos tapaukseen $\mu \neq 0$.

5.2 *Empiirinen kertymäfunktio.* Olkoon $X_1, X_2, \dots$ jono riippumattomia havaintoja satunnaismuuttujasta X, jonka kertymäfunktio on F. Havaintoja $X_1, \dots, X_n$ vastaava empiirinen kertymäfunktio määritellään kaavalla

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\#\{k \le n : X_k \le x\}}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

missä $\#A$ tarkoittaa A:n alkioiden lukumäärää. Todista, että havaintojen kasvaessa empiirinen kertymäfunktio suppenee todelliseen kertymäfunktioon: $\hat{F}_n(x) \to F(x)$ melkein varmasti kaikilla x.

5.3 *Cesàron lemma.* Olkoon (b_n) kasvava lukujono, jolle pätee $b_n \to \infty$, ja olkoon (v_n) jokin lukujono, jolle pätee $v_n \to v_\infty$. Todista, että tällöin

(a) $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) v_k \to v_\infty$,

(b) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \to v_\infty$.

5.4 *Satunnaissumman varianssi.* Olkoon $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, missä summattavat ovat neliöintegroituvia, eli $EX_k^2 < \infty$ kaikilla k. Kahden neliöintegroituvan satunnaismuuttujan kovarianssi määritellään kaavalla $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

(a) Näytä, että Cov on $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:n symmetrinen bilinaarimuoto, eli pätee:
- $\mathrm{Cov}(Y,X) = \mathrm{Cov}(X,Y)$,
- $\mathrm{Cov}(aX,Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$.

(b) Todista, että

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k \le n} \mathrm{Var}(X_k) + 2 \sum_{k < \ell \le n} \mathrm{Cov}(X_k, X_\ell).$$

5.5 *Heikko suurten lukujen laki.* Olkoon $S_n = X_1 + \cdots X_n$, missä neliöintegroituville summattaville pätee $EX_n = \mu$ kaikilla n, $\mathrm{Cov}(X_m, X_n) = 0$ kaikilla $m \neq n$, ja $n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) \to 0$ kun $n \to \infty$.

(a) Näytä, että $\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$.

(b) Todista heikko suurten lukujen laki: $n^{-1} S_n \xrightarrow{P} \mu$ kun $n \to \infty$.
(**Vihje**: Chebyshevin epäyhtälö.)

(c) Anna konkreettinen esimerkki riippuvasta satunnaisjonosta (X_n), jolle heikko suurten lukujen laki pätee.