Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS262 Stokastiikka 1

Laskuharjoitus 6
Ti 8.5.2012
L. Leskelä

6.1 *Kumulantit generoivan funktion arvojoukko.* Tarkastellaan satunnaismuuttujan ξ kumulantit generoivaa funktiota $\Lambda(u) = \log Ee^{u\xi}$.

(a) Todista, että $\Lambda(u) \in (-\infty, \infty]$ kaikilla $u \in \mathbb{R}$.

(b) Näytä, $\Lambda(u) < \infty$ kaikilla $u \in \mathbb{R}$, jos $|\xi| \le c$ melkein varmasti jollain luvulla c.

(c) Todista, että jos $\Lambda(c) < \infty$ jollain $c > 0$, niin $\Lambda(u) < \infty$ kaikilla $u \in [0, c]$.

(d) Anna esimerkki satunnaismuuttujasta, jolle $\Lambda(u) = \infty$ jollain $u > 0$.

6.2 *Kumulantit generoivan funktion derivaatta.* Oletetaan, että satunnaismuuttujan ξ kumulantit generoivalle funktiolle $\Lambda(u) = \log Ee^{u\xi}$ pätee $\Lambda(c) < \infty$ jollain $c > 0$.

(a) Olkoon $\delta > 0$. Todista, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\left| \frac{e^{hx} - 1}{h} \right| \le \frac{e^{\delta|x|} - 1}{\delta}$$

kun $h \in (-\delta, \delta)$ ja $h \neq 0$.

(b) Todista, että Λ on derivoituva välillä $(0, c)$ ja

$$\Lambda'(u) = \frac{E\xi e^{u\xi}}{Ee^{u\xi}}, \quad u \in (0, c).$$

(**Vihje**: Tutki ξ:n momentit generoivan funktion $M(u) = Ee^{u\xi}$ erotusosamäärää (a)-kohdan estimaattia hyväksi käyttäen.)

(c) Todista, että Λ:lla on oikeanpuoleinen derivaatta nollassa, jolle $\Lambda'(0+) = E\xi$.

6.3 *Kasinon suuri tappio.* Tarkastellaan kasinon keskituottoa, missä pelataan rulettia yhden euron panoksilla mustalle ja punaiselle panostaen. Tällöin kasinon n:n pelikierroksen tuotto on $V_n = n - 2S_n$, missä $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ on n:n riippumattoman Ber(p)-jakautuneen satunnaismuuttujan summa, missä $p = 18/37$.

(a) Perustele, miksi kasinon keskituotto $n^{-1}V_n$ lähestyy arvoa $1/37$, kun $n \to \infty$.

(b) Laske ξ_1:n kumulantit generoiva funktio $\Lambda(u) = \log Ee^{u\xi_1}$.

(c) Laske Λ:n Fenchelin–Legendren muunnos $\Lambda^*(x) = \sup_{u \in \mathbb{R}}(ux - \Lambda(u))$.

(d) Arvioi Cramérin lauseen avulla todennäköisyys sille, että kasinon keskituotto suurelta määrältä kierroksia n on negatiivinen.

Jatkuu seuraavalla sivulla...

6.4 *Esscher-muunnos.* Olkoon μ todennäköisyysmitta $\mathbb{R}$:llä ja u sellainen luku, jolle pätee $\Lambda_\mu(u) = \log \int_{\mathbb{R}} e^{ux}\, \mu(dx) < \infty$. Tn-mitan μ Esscher-muunnos $\nu_u = \mathcal{E}_u \mu$ määritellään kaavalla

$$(\mathcal{E}_u \mu)(B) = e^{-\Lambda_\mu(u)} \int_B e^{ux}\, \mu(dx), \quad B \subset \mathbb{R}.$$

(a) Näytä, että $\nu_u = \mathcal{E}_u \mu$ on tn-mitta.

(b) Näytä, että

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \nu_u(dx) = e^{-\Lambda_\mu(u)} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{ux} \mu(dx)$$

kaikilla mitallisilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

(c) Näytä, että $\Lambda_{\nu_u}(r) = \Lambda_\mu(u + r) - \Lambda_\mu(u)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$.

(d) Todista, että $(\mathcal{E}_u)^{-1} = \mathcal{E}_{-u}$.

6.5 *Satunnaismuuttujan oleellinen supremum.* Satunnaismuuttujan ξ oleellinen supremum määritellään kaavalla

$$\operatorname{ess\,sup} \xi = \inf\{x \in \mathbb{R} : \xi \le x \text{ m.v.}\}.$$

Todista, että jos ξ:n kumulantit generoiva funktio toteuttaa $\Lambda(u) < \infty$ kaikilla $u \in \mathbb{R}_+$, niin

$$\lim_{u \to \infty} \Lambda'(u) = \operatorname{ess\,sup} \xi.$$