

**7.1** *Kvantiilifunktion tasojoukot.* Olkoon  $X$  satunnaismuuttuja, jolla on kertymäfunktio  $F$  ja kvantiilifunktio  $Q(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$ . Näytä toteen, että kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  ja  $u \in (0, 1)$  pätee

$$Q(u) \leq x \quad \text{jos ja vain jos} \quad u \leq F(x).$$

**7.2** *Claytonin kopula.* Claytonin kopula  $C_\theta$  määritellään kaavalla

$$C_\theta(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta},$$

missä  $\theta > 0$ . Näytä, että:

- (a)  $C_\theta$  todellakin on kopula.
- (b)  $C_\theta(u_1, u_2) \rightarrow u_1 u_2$  kun  $\theta \rightarrow 0$ .
- (c)  $C_\theta(u_1, u_2) \rightarrow \min(u_1, u_2)$  kun  $\theta \rightarrow \infty$ .

**7.3** *Kopulaesityksen yksikäsitteisyys jatkuvassa tapauksessa.* Olkoon  $F$  jonkin satunnaisevektorin  $(X_1, \dots, X_n)$  yhteiskertymäfunktio, missä reunakertymäfunktiot  $F_1, \dots, F_n$  ovat jatkuvia.

- (a) Näytä, että  $X_i$ :n kertymämuunnos  $F_i(X_i)$  on tasajakautunut välillä  $(0, 1)$ .
- (b) Sklarin kopulaesityslauseen mukaan on olemassa kopula  $C$ , jolle  $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ . Näytä, että tällaisia kopuloita on täsmälleen yksi.

**7.4** *Hoeffdingin lemma.* Olkoot  $X_1$  ja  $X_2$  neliöintegroituja satunnaismuuttujia, joiden yhteiskertymäfunktio on  $F$ .

- (a) Näytä, että  $a - b = \int_{-\infty}^{\infty} (1(x \geq b) - 1(x \geq a)) dx$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (b) Näytä, että  $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} E(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)$ , missä satunnaisevektori  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  on satunnaisevektorin  $(X_1, X_2)$  riippumaton kopio (eli  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  on samoin jakautunut kuin  $(X_1, X_2)$ ).
- (c) Todista ylläolevia kohtia hyödyntämällä Hoeffdingin lemma:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2.$$

**7.5** *Spearmanin rho.* Satunnaismuuttujien  $X_1$  ja  $X_2$  Spearmanin rho määritellään kaavalla

$$\rho_S(X_1, X_2) = \text{Cor}(F_1(X_1), F_2(X_2)) = \frac{\text{Cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))}{\sqrt{\text{Var}(F_1(X_1)) \text{Var}(F_2(X_2))}},$$

missä  $F_1$  ja  $F_2$  ovat  $X_1$ :n ja  $X_2$ :n kertymäfunktiot. Näytä, että jos  $F_1$  ja  $F_2$  ovat jatkuvia bijektioita joukosta  $\mathbb{R}$  joukkoon  $(0, 1)$ , niin

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2,$$

missä  $C$  on vektorin  $(X_1, X_2)$  kopula. (**Vihje:** Tehtävät 7.4c ja 7.3a.)