

## Stokastisen integraalin numeerinen laskenta

Tässä harjoitustyössä tehtävänäsi on laskea stokastisia integraaleja numeerisesti simuloimalla. Numeeriseen laskentaan voit käyttää vapaasti valitsemaasi ohjelmistoa tai ohjelmointikieltä. Kirjoita ratkaisustasi lyhyt (tekstin osuus max 2 sivua, kuvineen max 5 sivua) *kirjallinen raportti*, missä esität

- saamasi tulokset,
- käyttämäsi menetelmät, sekä
- arviosi saamiesi tulosten paikkansapitävyydestä.

Harjoitustyö tulee palauttaa kirjallisena ennen ti 1.3.2011 klo 08:30 alkavaa luentoa, jonka aikana työt käsitellään kootusti. Työ arvostellaan asteikolla 0–6. Loppukokeeseen osallistuakseen on harjoitustyö suoritettava hyväksytysti. Sinun oletetaan käyttävän tähän harjoitustyön tekemiseen enintään 12 h työaikaa.

**A.1** Tarkastellaan yksinkertaistettua ilmastomallia, jonka mukaan maapallon keskilämpötila ( $^{\circ}C$ ) ajanhetkellä  $t$  noudattaa satunnaisprosessia

$$X_t = \mu_0 + \sigma_0 \int_0^t e^{2(s-t)} dB_s,$$

missä  $(B_t)$  on standardoitu Brownin liike,  $\mu_0 = 15$  ja  $\sigma_0 = 3$ .

- Laske  $(X_t)$ :n odotusarvo ajan funktiona.
- Piirrä 5 simuloitua satunnaisprosessin  $(X_t)$  polkua aikaväleillä  $[0, 1]$  ja  $[0, 10]$ . Voitko päätellä jotain kyseisen prosessin käytöksestä pitkällä aikavälillä?
- Laske numeerisesti arvio todennäköisyydelle, että keskilämpötila ajanhetkellä 1 on yli  $20^{\circ}C$ .
- Laske numeerisesti arvio todennäköisyydelle, että keskilämpötila ajanhetkellä 1 on alle  $5^{\circ}C$ .

**A.2** Korvataan ylläoleva malli yhtälöllä

$$X_t = \mu_t + \sigma_t \int_0^t e^{2(s-t)} dB_s,$$

missä

$$\mu_t = \mu_0 + at,$$

$\mu_0 = 15$ ,  $a = 3$ ; ja missä

$$\sigma_t = \sigma_0 + b \int_0^t e^{(s-t)} dW_s,$$

missä  $(B_t)$  ja  $(W_t)$  ovat riippumattomia standardoituja Brownin liikkeitä,  $\sigma_0 = 3$  ja  $b = 3$ .

- Laske  $(X_t)$ :n odotusarvo ajan funktiona.
- Piirrä 5 simuloitua satunnaisprosessin  $(X_t)$  polkua aikaväleillä  $[0, 1]$  ja  $[0, 10]$ . Voitko päätellä jotain kyseisen prosessin käytöksestä pitkällä aikavälillä?
- Laske numeerisesti arvio todennäköisyydelle, että keskilämpötila ajanhetkellä 1 on yli  $20^{\circ}C$ .
- Laske numeerisesti arvio todennäköisyydelle, että keskilämpötila ajanhetkellä 1 on alle  $5^{\circ}C$ .