Jyväskylän yliopisto **Harjoitus 1**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos 24.1.2011
MATS352 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 1 L. Leskelä

1.1 *Arviointi yksinkertaisilla satunnaismuuttujilla.* Olkoon X positiivinen satunnaismuuttja todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Määritellään jono satunnaismuuttujia X_n kaavalla

$$X_n = 2^{-n}[2^n X] \wedge n,$$

missä $a \wedge b = \min(a,b)$ ja $[a]$ tarkoittaa luvun a alaspäin pyöristämistä.

(a) Olkoon $\Omega = [0,3]$ ja $X(\omega) = \omega(3-\omega)$. Luonnostele satunnaismuuttujien X, X_1 ja X_2 kuvaajat ω:n funktioina.
(b) Todista, että X_n on yksinkertainen satunnaismuuttuja. Montako arvoa X_n voi saada?
(c) Näytä, että $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ kun $n \to \infty$ kaikilla $\omega \in \Omega$.

1.2 *Satunnaismuuttujan odotusarvon laskeminen jakauman avulla.* Merkitään satunnaismuuttujan X jakaumaa symbolilla $\mu_X = P \circ X^{-1}$.

(a) Todista, että

$$\mathrm{E}\, X = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mu_X(x)$$

yksinkertaiselle satunnaismuuttujalle X.
(b) Todista sama yhtälö mielivaltaiselle positiiviselle satunnaismuuttujalle X. (Vihje: Arvioi X:ää yksinkertaisilla satunnaismuuttujilla ja käytä Lebesguen monotonisen suppenemisen lausetta.)
(c) Päteekö yhtälö myös mielivaltaiselle satunnaismuuttujalle X, jolle $\mathrm{E}\,|X| < \infty$?

1.3 *Satunnaisvektorin momenttien laskeminen jakauman avulla.* Määritellään satunnaisvektorin $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jakauma kaavalla[1]

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \subset \mathbb{R}^n.$$

(a) Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen[2] funktio. Näytä, että $Y = f(X)$ on satunnaismuuttuja.
(b) Todista, että

$$\mathrm{E}\, f(X) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x),$$

kaikilla mitallisilla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

1.4 *Samoin jakautuneet satunnaismuuttujat.* Olkoot X ja Y satunnaismuuttjia todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja merkitään niiden jakaumia symboleilla μ_X ja μ_Y. Oletetaan, että $\mu_X = \mu_Y$. Vastaa seuraaviin kysymyksiin joko todistamalla väite tai antamalla vastaesimerkki.

(a) Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y ovat samat?
(b) Onko $P(X = Y) = 1$?
(c) Päteekö $\mathrm{E}\, f(X) = \mathrm{E}\, f(Y)$ kaikilla mitallisilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$?
(d) Päteekö $\mathrm{E}\, f(X,Y) = \mathrm{E}\, f(Y,X)$ kaikilla mitallisilla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$?

1.5 *Satunnaisprosessin yksiulotteiset jakaumat.* Anna esimerkki satunnaisprosesseista (X_t) ja (Y_t), joilla on eri äärellisulotteiset jakaumat, mutta

$$P(X_t \in B) = P(Y_t \in B) \quad \text{kaikilla } B \subset \mathbb{R} \text{ ja } t \geq 0.$$

1.6 *Binaarisen satunnaisprosessin äärellisulotteiset jakaumat.* Olkoot (X_t) ja (Y_t) $\{0,1\}$-arvoisia satunnaisprosesseja parametrijoukolla $\mathbb{R}_+$. Näytä, että (X_t):llä ja (Y_t):llä on samat äärellisulotteiset jakaumat jos ja vain jos

$$P(X_{t_1} + \cdots + X_{t_n} > 0) = P(Y_{t_1} + \cdots + Y_{t_n} > 0)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$.

[1] Aina merkittäessä $B \subset \mathbb{R}^n$ oletetaan, että B on Borel-joukko, mikäli ei erikseen toisin mainita.
[2] Tällä kurssilla mitallinen tarkoittaa Borel-mitallinen, mikäli ei erikseen toisin mainita.