**2.1** *Gaussinen satunnaisvektori.* Satunnaisvektori $X = (X_1, \dots, X_n)$ on *standardoitu gaussinen*, jos sen koordinaatit ovat riippumattomia standardoituja gaussisia. Satunnaisvektori $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ on *gaussinen*, jos on olemassa matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, vektori $b \in \mathbb{R}^n$ sekä standardoitu gaussinen satunnaisvektori $X = (X_1, \dots, X_m)$ siten, että $Y = AX + b$.

(a) Laske gaussisen satunnaisvektorin $Y$ odotusarvo $m$ ja kovarianssimatriisi $C$ ylläolevaa esitystä käyttäen.

(b) Onko matriisi $C$ kääntyvä?

**2.2** *Gaussisten satunnaismuuttujien summa ja erotus.* Olkoot $X_1$ ja $X_2$ riippumattomia gaussisia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on nolla ja varianssi $\sigma^2 > 0$. Näytä, että $X_1 - X_2$ ja $X_1 + X_2$ ovat riippumattomia ja gaussisia.

**2.3** *Brownin liikkeen momentit.* Olkoon $(B_t)$ standardoitu Brownin liike.

(a) Laske $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ kaikille $s, t \geq 0$.

(b) Laske $\mathrm{E}\, B_1 B_2^2$.

(c) Laske $\mathrm{E}\, B_1^2 B_2^2$.

**2.4** *Brownin liikkeen ajansiirto.* Olkoon $(B_t)$ standardoitu Brownin liike ja kiinnitetään $t_0 > 0$. Näytä, että satunnaisprosessi $Y_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ on Brownin liike.

**2.5** *Brownin liikkeen nollaus.* Olkoon $(B_t)$ standardoitu Brownin liike ja olkoon $U$ siitä riippumaton välillä $[0, 1]$ tasajakautunut satunnaismuuttuja. Määritellään prosessi $(Z_t)$ kaavalla

$$Z_t = \begin{cases} B_t, & t \neq U, \\ 0, & t = U. \end{cases}$$

(a) Näytä, että $(Z_t)$:llä ja $(B_t)$:llä on samat äärellisulotteiset jakaumat.

(b) Näytä, että $(Z_t)$ on epäjatkuva melkein varmasti.

(c) Onko $(Z_t)$ Brownin liike?

**2.6** *Brownin liikkeen aikaskaalaus.* Olkoon $(B_t)$ standardoitu Brownin liike ja $a > 0$. Määritellään satunnaisprosessi $(X_t)$ kaavalla $X_t = a^{-1} B_{a^2 t}$.

(a) Mikä on satunnaismuuttujan $X_t - X_s$ jakauma, kun $s \leq t$?

(b) Näytä, että satunnaisprosessi $(X_t)$ on Brownin liike.