3.1 *Brownin liikkeen ennustaminen.* Olkoon $(\mathcal{F}_t)$ Brownin liikkeen (B_t) historia, eli $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \le t)$. Olkoon Y satunnaismuuttuja, jolle pätee $\mathrm{E}\,|Y| < \infty$.

(a) Todista, että $M_t = \mathrm{E}(Y|\mathcal{F}_t)$ on martingaali.

(b) Laske M_t, kun $Y = B_1$.

(c) Laske M_t, kun $Y = B_1^2$.

3.2 *Brownin liikeestä johdetut martingaalit.* Olkoon (B_t) standardoitu Brownin liike. Tutki, mitkä seuraavista satunnaisprosesseista ovat martingaaleja:

(a) $X_t = B_t + 4t$.

(b) $X_t = B_t^2$.

(c) $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s\,ds$.

(d) $X_t = B_1(t)B_2(t)$, missä $(B_1(t))$ ja $(B_2(t))$ ovat riippumattomia standardoituja Brownin liikkeitä.

3.3 *Oikealta jatkuvan satunnaisprosessin mitallisuus.* Tarkastellaan satunnaisprosessia (X_t), jonka polut ovat oikealta jatkuvat. Määritellään satunnaisprosessi $X^{(n)}$, missä $n \in \mathbb{N}$, asettamalla $X_0^{(n)} = X_0$ ja

$$X_t^{(n)} = X_{(k+1)/2^n}, \quad \text{kun } k/2^n < t \le (k+1)/2^n.$$

(a) Näytä, että kuvaus $(t,\omega) \mapsto X_t^{(n)}(\omega)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-mitallinen kaikilla n.

(b) Näytä, että kaikilla ω ja t pätee $X_t^{(n)}(\omega) \to X_t(\omega)$, kun $n \to \infty$.

(c) Perustele, että kuvaus $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ on $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-mitallinen.

(d) Päteekö sama johtopäätös vasemmalta jatkuville satunnaisprosesseille?

3.4 *Brownin liike integrandina.* Näytä, että Brownin liike (B_t) kuuluu funktioluokkaan $\mathcal{V}(S,T)$ kaikilla $0 < S < T$ (Øksendal, määritelmä 3.1.4).

3.5 *Brownin liikkeen neliöllinen heilahtelu.* Olkoon (B_t) standardoitu Brownin liike. Olkoon $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t$ jono välin $[0,t]$ osituksia, jolle pätee $\max_{1\le j\le n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to 0$, kun $n \to \infty$. Näytä, että

$$\sum_{j=1}^n |B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}|^2 \to t \qquad L^2(\Omega)\text{:ssa.}$$

(Vihje: $\mathrm{E}\,B_t^4 = 3t^2$. Ks. myös Øksendal, tehtävän 2.17 vihjeet.)

3.6 *Satunnaisprosessin riippumattomat lisäykset.* Satunnaisprosessilla (X_t) on *riippumattomat lisäykset*, mikäli lisäykset $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ ovat keskenään riippumattomat sekä riippumattomat X_0:sta kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Todista, että jos (X_t):llä on riippumattomat lisäykset, niin silloin $X_{t+h} - X_t$ on riippumaton sigma-algebrasta $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$ kaikilla $t, h \ge 0$.