Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS352 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 1

Harjoitus 4
14.2.2011
L. Leskelä

4.1 *Brownin liikkeen neliön kompensointi.* Olkoon (B_t) standardoitu Brownin liike ja $(\mathcal{F}_t)$ sen historia. Mille ei-satunnaiselle funktiolle (a_t) pätee, että $B_t^2 - a_t$ on martingaali?

4.2 *Martingaaliominaisuus eri historioiden suhteen.*

(a) Näytä, että jos satunnaisprosessi (X_t) on martingaali jonkin historian $(\mathcal{F}_t)$ suhteen, niin se on martingaali myös oman historiansa $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \le t)$ suhteen.

(b) Näytä, että jos (X_t) on martingaali oman historiansa suhteen, niin

$$\mathrm{E}\, X_t = \mathrm{E}\, X_0 \quad \text{kaikilla } t. \tag{1}$$

(c) Anna esimerkki satunnaisprosessista (X_t) jolle pätee (1), mutta joka ei ole martingaali oman historiansa suhteen.

4.3 *Itō-integraalin odotusarvo ja mitallisuus.* Näytä, että kaikille satunnaisprosesseille $(X_t) \in \mathcal{V}(S,T)$ pätee

(a) $\mathrm{E} \int_S^T X_t \, dB_t = 0$,

(b) $\int_S^T X_t \, dB_t$ on mitallinen sigma-algebran $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s : s \le t)$ suhteen, kun oletetaan, että $\mathcal{F}_T$ sisältää kaikki perussigma-algebran $\mathcal{F}$ nollamittaiset tapahtumat.

4.4 *Itō-integraalin lineaarisuus.* Olkoot $f, g \in \mathcal{V}(S,T)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Näytä, että

(a) $\int_S^T (af_t + bg_t) \, dB_t = a \int_S^T f_t \, dB_t + b \int_S^T g_t \, dB_t$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$,

(b) $\int_S^U f_t \, dB_t + \int_U^T f_t \, dB_t = \int_S^T f_t \, dB_t$ kaikilla $U \in (S,T)$.

(c) Anna esimerkkejä satunnaismuuttujista z, joille pätee $\int_S^T z f_t \, dB_t = z \int_S^T f_t \, dB_t$.

4.5 *Hilbert-avaruuden isometria.* Näytä, että

$$\mathrm{Cov}\left(\int_S^T f_t \, dB_t, \int_S^T g_t \, dB_t \right) = \mathrm{E} \int_S^T f_t g_t \, dt$$

kaikilla $f, g \in \mathcal{V}(S,T)$, eli

$$\langle \mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g) \rangle_{L^2(P)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathrm{Leb} \times P)}.$$

4.6 *Itō-integraalin injektiisisyys.* Oletetaan, että satunnaisprosessit $f, g \in \mathcal{V}(S,T)$ ja vakiot $C, D \in \mathbb{R}$ toteuttavat

$$C + \int_S^T f_t \, dB_t = D + \int_S^T g_t \, dB_t \quad \text{m.v.}$$

Näytä, että tällöin $C = D$ ja $f(t,\omega) = g(t,\omega)$ melkein kaikilla $(t,\omega) \in [S,T] \times \Omega$.