5.1 *Itō-prosessin komponentit.* Olkoon (X_t) Itō-prosessi $\mathbb{R}$:ssä, jolla on esitys muotoa

$$dX_t = u_X(t)\,dt + v_X(t)\,dB_t.$$

Olkoon $Y_t = g(t, X_t)$, missä $g : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva.

(a) Selvitä satunnaisprosessit u_Y ja v_Y, joille pätee

$$dY_t = u_Y(t)\,dt + v_Y(t)\,dB_t.$$

(b) Näytä, että satunnaisprosessit u_Y ja v_Y toteuttavat Itō-prosessin määritelmässä (Øksendal, Määritelmä 4.1.1) vaaditut ehdot.

5.2 *Itōn kaavan sovelluksia.* Kirjoita seuraavat satunnaisprosessit muodossa $dY_t = udt + vdB_t$:

(a) $Y_t = B_t^2$.
(b) $Y_t = 2 + t + e^{B_t}$.
(c) $Y_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$, missä (B_1, B_2) on 2-ulotteinen Brownin liike.
(d) $Y_t = (t_0 + t, B_t)$.
(e) $Y_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t)B_3(t))$, missä (B_1, B_2, B_3) on 3-ulotteinen Brownin liike.

5.3 *Brownin liikkeen neliön integraali.* Näytä Itōn kaavalla, että

$$\int_0^t B_s^2\,dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s\,ds.$$

5.4 *Itō-prosessien osittaisintegrointi.* Olkoot X ja Y Itō-prosesseja $\mathbb{R}$:ssä.

(a) Näytä, että

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t.$$

(b) Näytä, että

$$\int_0^t X_s dY_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s \cdot dY_s.$$

5.5 *Eksponentiaalinen martingaali.* Olkoon $\theta(t) = (\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t))$ sellainen satunnaisprosessi $\mathbb{R}^n$:ssä, että $\theta_k \in \mathcal{V}[0,T]$ kaikilla k. Määritellään

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \theta(s)\,dB(s) - \frac{1}{2}\theta^2(s)\,ds\right),$$

missä B on Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\theta^2 = \sum_{k=1}^n \theta_k^2$.

(a) Todista, että $dZ_t = Z_t\theta(t)dB(t)$.
(b) Näytä, että Z on martingaali parametrijoukolla $t \in [0,T]$, mikäli

$$(Z_t\theta_k(t))_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}[0,T] \quad \text{kaikilla } k.$$

5.6 *Brownin liikkeen momentit.* Olkoot B standardi 1-ulotteinen Brownin liike. Merkitään $\beta_k(t) = \mathrm{E}\,B_t^k$.

(a) Todista Itōn kaavaa käyttäen, että

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \beta_{k-2}(s)\,ds; \quad k \geq 2.$$

(b) Näytä, että $\mathrm{E}\,B_t^4 = 3t^2$ ja laske $\mathrm{E}\,B_t^6$.
(c) Näytä, että $\mathrm{E}\,B_t^k$ on nolla parittomille k, ja että

$$\mathrm{E}\,B_t^{2k} = \frac{(2k)!t^k}{2^k k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$