Jyväskylän yliopisto | **Harjoitus 6**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | 28.2.2011
MATS352 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 1 | L. Leskelä

6.1 *Laplace-operaattori Itōn kaavassa.* Olkoon B Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva. Näytä, että

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\, ds,$$

missä $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ on Laplace-operaattori.

6.2 *Brownin liikkeestä johdettuja martingaaleja.* Todista Itōn kaavaa soveltaen, että seuraavat ovat martingaaleja: a) $X_t = e^{t/2}\cos B_t$. b) $X_t = e^{t/2}\sin B_t$. c) $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - t/2)$.

6.3 *Martingaalin neliöllinen heilahtelu.* Tarkastellaan Itō-integraalia $dX_t = v_t \cdot dB_t$, missä $v \in \mathcal{V}^n(0,T)$ ja B on Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä.

(a) Näytä esimerkillä, että (X_t^2) ei yleensä ottaen ole martingaali.

(b) Näytä, että jos v on rajoitettu, niin $M_t = X_t^2 - \int_0^t |v_s|^2\, ds$ on martingaali.

6.4 *Neliöintegroituva ennustusmartingaali.* Olkoon Y $\mathcal{F}_T$-mitallinen satunnaismuuttuja siten, että $\mathrm{E}\,|Y|^2 < \infty$. Tällöin $M_t = \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$ on martingaali.

(a) Näytä, että $\mathrm{E}\, M_t^2 < \infty$ kaikilla t.

(b) Esitä satunnaisprosessi (v_t), jolle pätee $M_t = \mathrm{E}\, M_0 + \int_0^t v_s\, dB_s$ seuraavissa tapauksissa: (i) $Y = B_T^2$, (ii) $Y = B_T^3$, (iii) $Y = \exp(\sigma B_T)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ vakio. (Vihje: $\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$ on martingaali.)

6.5 *Itōn kaava melkein C^2-funktiolle.* Oletetaan, että C^1-funktiolle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee: g on C^2 avoimessa joukossa $\mathbb{R} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ ja $|g''(x)| \le M$ kun $x \notin \{z_1, \dots, z_n\}$. Olkoon (B_t) Brownin liike $\mathbb{R}$:ssä. Näytä, että seuraava Itōn kaava pätee:

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\, ds.$$

(Vihje: Valitse $g_k \in C^2$ siten, että $g_k \to g$ tasaisesti, $g_k' \to g'$ tasaisesti, sekä $|g_k''| \le M$ ja $g_k'' \to g''$ joukon $\{z_1, \dots, z_n\}$ ulkopuolella.)

6.6 *Brownin liikkeen lokaali aika.* Olkoon B Brownin liike $\mathbb{R}$:ssä. Halutaan soveltaa Itōn kaavaa funktioon $g(x) = |x|$. Koska g ei ole C^2, arvioimme sitä funktiolla $g_\epsilon(x) = |x| 1(|x| \ge \epsilon) + \frac{1}{2}(\epsilon + x^2/\epsilon) 1(|x| < \epsilon)$.

(a) Näytä Tehtävän 6.5 avulla, että

$$g_\epsilon(B_t) = g_\epsilon(B_0) + \int_0^t g_\epsilon'(B_s)\, dB_s + L_\epsilon(t), \tag{1}$$

missä (merkitään $|B|$:llä joukon $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ Lebesguen mittaa)

$$L_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\left|\{s \in [0,t] : B_s \in (-\epsilon, \epsilon)\}\right|.$$

(b) Näytä (vihje: Itō-isometria), että kun $\epsilon \to 0$,

$$\int_0^t g_\epsilon'(B_s) 1(|B_s| < \epsilon)\, dB_s \to 0 \qquad L^2(P)\text{:ssä.}$$

(c) Todista (viemällä $\epsilon \to 0$ yhtälössä (1)) *Tanakan kaava*:

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\, dB_s + L(t)$$

missä $L(t) = \lim_{\epsilon \to 0} L_\epsilon(t)$ ($L^2(P)$:ssä) ja $\mathrm{sgn}(x)$ on luvun x merkki.