

**7.1 Ornstein–Uhlenbeck -prosessi.** Tarkastellaan satunnaisprosessia

$$X_t = \mu + \sigma \int_0^t e^{\gamma(s-t)} dB_s, \quad (1)$$

missä  $B$  on standardi Brownin liike ja  $\mu, \sigma, \gamma$  ovat annettuja vakioita.

(a) Näytä, että  $X$  on Itô-prosessi ja selvitä  $u$  ja  $v$ , joille pätee

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t.$$

(b) Näytä, että  $u$  ja  $v$  ovat mitallisia  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$  suhteen sekä sopivia  $B$ :n virittämän historian suhteen.

(c) Onko  $v \in \mathcal{V}(0, T)$ ?

**7.2 OU-prosessin odotusarvo ja varianssi.** Tarkastellaan kaavan (1) määrittämää satunnaisprosessia.

(a) Laske  $E X_t$  ja  $\text{Var}(X_t)$ .

(b) Laske ylläolevien lukujen raja-arvot, kun  $t \rightarrow \infty$ .

**7.3 OU-prosessin jakauma.** Tarkastellaan kaavan (1) määrittämää satunnaisprosessia. Tiedämme, että  $X_t$  on Gaussinen kaikilla  $t$  (Geiss, Esimerkki 3.1.13.). Valitaan parametreiksi  $\mu = 15$ ,  $\sigma = 3$  ja  $\gamma = 2$ , kuten kurssin harjoitustehtävässä.

(a) Laske  $P(X_1 > 20)$ .

(b) Laske  $P(X_1 < 5)$ .

**7.4 Satunnaisesti moduloitu OU-prosessi.** Tarkasteellaan satunnaisprosessia

$$X_t = \mu_0 + at + \sigma_t \int_0^t e^{\gamma(s-t)} dB_s, \quad (2)$$

missä

$$\sigma_t = \sigma_0 + b \int_0^t e^{\delta(s-t)} dW_s, \quad (3)$$

missä  $(B_t)$  ja  $(W_t)$  ovat riippumattomia standardoituja Brownin liikkeitä ja  $\mu_0, \sigma_0, a, b, \gamma, \delta$  vakioita.

(a) Näytä, että  $X$  on Itô-prosessi ja selvitä  $u$  ja  $v = (v_1, v_2)$ , joille pätee

$$dX_t = u(t)dt + v_1(t)dB_t + v_2(t)dW_t.$$

(b) Näytä, että  $u$  ja  $v$  ovat mitallisia  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$  suhteen sekä sopivia  $(B, W)$ :n virittämän historian suhteen.

(c) Onko  $v \in \mathcal{V}^2(0, T)$ ?

**7.5 OU-prosessin modulaattorin odotusarvo ja varianssi.** Tarkastellaan kaavan (3) määräämää prosessia.

(a) Laske  $E \sigma_t$  ja  $\text{Var}(\sigma_t)$ .

(b) Laske ylläolevien lukujen raja-arvot, kun  $t \rightarrow \infty$ .

**7.6 Satunnaisesti moduloidun OU-prosessin odotusarvo ja varianssi.** Tarkastellaan kaavan (2) määräämää prosessia.

(a) Laske  $E X_t$  ja  $\text{Var}(X_t)$

(b) Laske ylläolevien lukujen raja-arvot, kun  $t \rightarrow \infty$ .

(c) Onko  $X_t$  Gaussinen?