Määritelmiä

Lasse Leskelä*

January 24, 2011

1 Määritelmiä

1.1 Satunnaismuuttujat

- Satunnaismuuttujan X *jakauma* on todennäköisyysmitta $P(X \in \cdot)$.
- Satunnaismuuttujan X *karakteristinen funktio* on kuvaus $\mathbb{R} \ni u \mapsto \mathrm{E}\, e^{iuX}$.
- Satunnaismuuttuja X on *yksinkertainen*, jos se voi saada vain äärellisen määrän arvoja.

1.2 Satunnaisvektorit

- Satunnaisvektorin $(X_1, \dots, X_n)$ *yhteisjakauma* (tai *jakauma*) on todennäköisyysmitta $P(X_1 \in \cdot, \dots, X_n \in \cdot)$.
- Todennäköisyysmittoja $P(X_i \in \cdot)$, $i = 1, \dots, n$, kutsutaan satunnaisvektorin $(X_1, \dots, X_n)$ *reunajakaumiksi*.
- Satunnaisvektorin $(X_1, \dots, X_n)$ *karakteristinen funktio* on kuvaus $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto \mathrm{E}\, e^{i(u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n)}$.

1.3 Gaussiset jakaumat

- Satunnaismuuttuja X on *standardoitu gaussinen*, jos sen jakauman tiheysfunktio on $(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$.
- Satunnaismuuttuja Y on *gaussinen*, jos on olemassa luvut $a \geq 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ sekä standardoitu gaussinen satunnaismuuttuja X siten, että $Y = aX + b$.

*Postal address: Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, PO Box 35, 40014 University of Jyväskylä, Finland Tel: +358 14 260 2728. URL: http://www.iki.fi/lsl/ Email: lasse.leskela@iki.fi

- Satunnaisvektori $X = (X_1, \ldots, X_n)$ on *standardoitu gaussinen*, jos sen koordinaatit ovat riippumattomia standardoituja gaussisia.

- Satunnaisvektori $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ on *gaussinen*, jos on olemassa matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, vektori $b \in \mathbb{R}^n$ sekä standardoitu gaussinen satunnaisvektori $X = (X_1, \ldots, X_m)$ siten, että $Y = AX + b$.

- Todennäköisyysmitta $\mathbb{R}^n$:ssä on *gaussinen*, mikäli se on jonkin gaussisen satunnaisvektorin jakauma.

1.4 Satunnaisprosessit

- *Satunnaisprosessi* $(X_t) = (X_t)_{t \in T}$ on joukon $T \subset \mathbb{R}_+$ parametrisoima kokoelma satunnaismuuttujia X_t määriteltynä todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Joukko T on prosessin X *parametriavaruus*.

- Satunnaisprosessin (X_t) otosta $\omega \in \Omega$ vastaava *polku* on kuvaus $t \mapsto X_t(\omega)$.

- Satunnaisprosessin (X_t) virittämää todennäköisyysmittojen kokoelmaa $P(X_{t_1} \in \cdot, \ldots, X_{t_n} \in \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \cdots < t_n$ kutsutaan (X_t):n *äärellisulotteisiksi jakaumiksi*.

- Satunnaisprosessin (X_t) *historia* on sigma-algebrojen kokoelma $(\mathcal{F}_t)$, missä $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

- Satunnaisprosessi (Y_t) on satunnaisprosessin (X_t) *versio*, jos (Y_t) ja (X_t) ovat määriteltyjä samalla todennäköisyysavaruudella ja $P(X_t = Y_t) = 1$ kaikilla t.

- Satunnaisprosessi (X_t) on *gaussinen*, mikäli satunnaisvektori $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ on gaussinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

- Satunnaisprosessi (X_t) on *stationaarinen*, mikäli prosesseilla $t \mapsto X_{t+h}$ ja $t \mapsto X_t$ on samat äärellisulotteiset jakaumat, kaikilla $h \geq 0$.

- Satunnaisprosessilla (X_t) on *riippumattomat lisäykset*, mikäli satunnaismuuttujat $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ ovat keskenään riippumattomat sekä riippumattomat X_0:sta kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

- Satunnaisprosessilla (X_t) on *stationaariset lisäykset*, mikäli prosesseilla $(X_{t+h} - X_h)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ja $(X_t - X_0)_{t \in \mathbb{R}_+}$ on samat äärellisulotteiset jakaumat kaikilla $h \geq 0$.

1.5 Brownin liike

- Reaaliarvoinen satunnaisprosessi (B_t) on *standardoitu Brownin liike*, jos sen alkuarvo on nolla, sen polut ovat jatkuvat, sillä on riippumattomat lisäykset, ja kaikilla $t, h \geq 0$ pätee, että $B(t+h) - B(t)$ on gaussinen odotusarvolla nolla ja varianssilla h.