Jyväskylän yliopisto **Harjoitus 1**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos Ma 21.3.2011
MATS353 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 2 L. Leskelä

1.1 *Yksinkertaisia stokastisia differentiaaliyhtälöitä.* Näytä, että allaolevat satunnaisprosessit ratkaisevat vastaavan stokastisen differentiaaliyhtälön:

(a) $X_t = e^{B_t}$ ratkaisee $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$.

(b) $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ ratkaisee

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t, \quad X_0 = 0.$$

(c) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$ ratkaisee

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} dB_t.$$

1.2 *Brownin liike ellipsillä.* Olkoon B Brownin liike $\mathbb{R}$:ssä ja $a, b > 0$ vakioita. Määritellään satunnaisprosessi $X = (X_1, X_2)$ kaavalla $X_1(t) = a\cos B_t$, $X_2(t) = b\sin B_t$.

(a) Näytä, että X kuuluu todennäköisyydellä yksi erääseen tason kompaktiin joukkoon. Mihin?

(b) Näytä, että X ratkaisee stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dB_t,$$

missä

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 *Monikohinainen eksponentiaalinen kasvu.* Olkoon $(B_1, \ldots, B_n)$ Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä sekä $r > 0$ ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ vakioita.

(a) Ratkaise stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dX_t = rX_t dt + X_t \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k dB_k(t) \right), \quad X_0 > 0.$$

(b) Laske $\mathrm{E}\, X_t$.

1.4 *Lineaarinen virtaus, vakio sekoitus.* Ratkaise stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t,$$

missä μ, σ ovat reaalisia vakioita.

1.5 *Vakio virtaus, lineaarinen sekoitus.* Ratkaise stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dY_t = r dt + \alpha Y_t dB_t,$$

missä r, α ovat reaalisia vakioita. (Vihje: kerro yhtälö tekijällä $F_t = \exp(-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t)$ ja käytä Itō-prosessien osittaisintegrointikaavaa.)