Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATS353 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 2

Harjoitus 2
Ma 28.3.2011
L. Leskelä

2.1 *Iteroidun logaritmin laki.* Näytä soveltamalla iteroidun logarithmin lakia, että

(a)
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad \text{melkein varmasti.}$$

(b)
$$\lim_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{t^\alpha} = 0 \quad \text{melkein varmasti kaikilla } \alpha > \frac{1}{2}.$$

2.2 *Brownin silta.* Olkoot a, b reaalisia vakioita. Näytä, että

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad 0 \le t < 1$$

ratkaisee stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1-t}\, dt + dB_t, \quad Y_0 = a.$$

Keksitkö, miksi kyseistä ratkaisua kutsutaan Brownin sillaksi?

2.3 *Logaritminen virtaus, katkaistu lineaarinen sekoitus.* Näytä, että stokastisella differentiaaliyhtälöllä

$$dX_t = \log(1 + X_t^2)dt + 1(X_t > 0)X_t dB_t$$

on yksikäsitteinen vahva ratkaisu.

2.4 *Stokastinen logistinen yhtälö.* Tarkastellaan stokastista differentiaaliyhtälöä

$$dX_t = rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t dB_t, \quad X_0 = x,$$

missä x, r, K, β ovat positiivisia vakioita.

(a) Esitä tulkinnat parametreille x, r, K, β, kun X:llä mallinnetaan populaation kokoa.

(b) Näytä, että kyseisellä yhtälöllä on ratkaisu

$$X_t = \frac{\exp((rK - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t)}{x^{-1} + r\int_0^t \exp((rK - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta B_s)ds}, \tag{1}$$

(c) Voidaanko sanoa jotain ylläolevan SDY:n muiden ratkaisujen olemassaolosta?

2.5 *Stokastisen logistisen yhtälön ratkaisu pitkällä aikavälillä.* Tarkastellaan satunnaisprosessia (1) kun $t \to \infty$. Näytä, että X_t suppenee melkein varmasti ja määritä $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$, kun oletetaan, että $rK < \frac{1}{2}\beta^2$. (Vihje: Tehtävä 2.1.)