3.1 *Ehdollistaminen ja riippumattomuus.* Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia ja $\mathcal{F}$ sellainen sigma-algebra, että X on $\mathcal{F}$-mitallinen ja Y $\mathcal{F}$:stä riippumaton. Näytä, että kaikilla rajoitetuilla mitallisilla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pätee

$$\mathrm{E}\{f(X,Y) \,|\, \mathcal{F}\} = g(X)$$

melkein varmasti, missä $g(x) = \mathrm{E}\, f(x,Y)$.

3.2 *Brownin liikkeen Markov-ominaisuus.* Olkoon B standardoitu Brownin liike ja $(\mathcal{F}_t)$ sen historia. Näytä, että kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \mathbb{R}$ ja kaikilla $s \le t$,

$$\mathrm{P}\,(B_t \in A|\, \mathcal{F}_s) = \mathrm{P}\,(B_t \in A \,|\, B_s) \quad \text{m.v.}$$

(Vihje: Tehtävä 3.1.)

3.3 *Markov-prosessin operaattoripuoliryhmä.* Olkoon $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ Markov-prosessi numeroituvassa tila-avaruudessa S. Merkitään symbolilla C_b rajoitettujen reaalifunktioiden joukkoa S:llä. Määritellään funktio $T_t f$, missä $f \in C_b$ ja $t \in \mathbb{R}_+$ kaavalla

$$T_t f(i) = \mathrm{E}\{f(X_t) \,|\, X_0 = i\}, \quad i \in S.$$

(a) Todista, että kaikilla $s, t \ge 0$ pätee

$$\mathrm{E}\,\{f(X_{s+t}) \,|\, \mathcal{F}_t\} = \sum_{i\in S} 1(X_t = i)\, \mathrm{E}\,\{f(X_{s+t}) \,|\, X_t = i\} = T_s f(X_t).$$

(b) Todista, että

$$T_{s+t} f = T_t T_s f \quad \text{kaikilla } f \in C_b \text{ ja } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

(c) Osaatko tulkita, miten b)-kohdan kaava voidaan esittää siirtymämatriisin avulla diskreettiaikaisen Markov-prosessin tapauksessa?

3.4 *Pysäytyssigma-algebra.* Olkoon τ historian $(\mathcal{F}_t)$ pysäytyshetki[1] todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

(a) Näytä, että $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t\}$ on sigma-algebra.
(b) Näytä, että τ on $\mathcal{F}_\tau$-mitallinen.
(c) Oletetaan, $\tau(\omega) = t_0$ kaikilla ω, missä $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Näytä, että tällöin $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$.

3.5 *Jatkuvan satunnaisprosessin osumahetki.* Olkoon X jatkuva satunnaisprosessi $\mathbb{R}^d$:ssä ja $C \subset \mathbb{R}^d$ suljettu. Määritellään X:n osumahetki joukkoon C kaavalla

$$\tau_C = \inf\{t \ge 0 : X_t \in C\},$$

missä sovelletaan käytäntöä $\inf \emptyset = \infty$. Näytä, että τ_C on X:n historian pysäytyshetki. Vihje: Näytä, että

$$\{\tau \le t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\in\mathbb{Q} \bigcap (0,t)} \bigcup_{x\in\mathbb{Q}^d \cap C} \{||X_s - x|| < 1/n\}\,.$$

[1] Satunnaismuuttuja τ joukossa $[0, \infty]$ on historian $(\mathcal{F}_t)$ pysäytyshetki, jos $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla t.