Jyväskylän yliopisto | **Harjoitus 4**
Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ma 11.4.2011
MATS353 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 2 | L. Leskelä

4.1 *Itō-diffuusion generaattori.* Olkoon X Itō-diffuusio $\mathbb{R}^n$:ssä, jolle

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

missä B on Brownin liike $\mathbb{R}^m$:ssä ja $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ ovat Lipschitz-jatkuvia. Todista yksityiskohtaisesti [Øksendal, Lause 7.3.3], että X:n generaattori toteuttaa

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f(x)$$

kaikilla kompaktikantajaisilla kahdesti jatkuvasti derivoituvilla f. (Vihje: Voit käyttää tulosta [Øksendal, Lemma 7.3.2].)

4.2 *Yksiulotteisten diffuusioiden generaattoreita.* Selvitä seuraavien yksiulotteisten Itō-diffuusioiden generaattorit:

(a) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$, missä $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

(b) $dY_t = r dt + \alpha Y_t dB_t$, missä $r, \alpha \in \mathbb{R}$.

4.3 *Moniulotteisten diffuusioiden generaattoreita.* Selvitä seuraavien moniulotteisten Itō-diffuusioiden generaattorit:

(a)

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} dB_t, \quad B_t \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^2.$$

4.4 *Monikohinaisen eksponentiaalisen kasvuprosessin generaattori.* Olkoon B Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä ja r, α_k vakioita. Määritä generaattori prosessille X, joka toteuttaa

$$dX_t = rX_t dt + X_t \sum_{k=1}^n \alpha_k dB_k(t).$$

4.5 *Brownin liikkeen poistumahetki pallosta.* Olkoon B^a Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä käynnistettynä pisteestä $a \in K_R$, missä $K_R = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < R\}$. Merkitään B^a:n poistumishetkeä pallosta K_R symbolilla $\tau = \inf\{t \geq 0 : B^a(t) \notin K_R\}$.

(a) Olkoon $\tau_m = \min(\tau, m)$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$. Todista, että

$$E||B^a(\tau_m)||^2 = ||a||^2 + nE\tau_m. \tag{1}$$

(Vihje: Sovella Dynkinin kaavaa kompaktikantajaiseen funktioon $f \in C^2$, jolle pätee $f(x) = ||x||^2$ kaikilla $x \in K_R$.)

(b) Näytä yhtälöä (1) käyttäen, että $E\tau_m \leq n^{-1}(R^2 - ||a||^2)$ kaikilla m.

(c) Näytä, että $\tau < \infty$ melkein varmasti, ja että $E\tau = n^{-1}(R^2 - ||a||^2)$.

(d) Poistuuko Brownin liike melkein varmasti jokaisesta $\mathbb{R}^n$:n rajoitetusta joukosta?