5.1 *Lämpöyhtälön alkuarvo-ongelma.* Olkoon $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Esitä Brownin liikkeen avulla rajoitettu ratkaisu alkuarvo-ongelmalle

$$\begin{aligned} \partial_t g(t,x) - \frac{1}{2}\Delta_x g(t,x) &= 0, \quad t > 0, \\ g(0,x) &= \phi(x). \end{aligned}$$

5.2 *Eräs kaksiulotteinen diffuusio.* Etsi Itō-diffuusio $\mathbb{R}^2$:ssa, jonka generaattori A toteuttaa

$$A\phi(t,x) = \log(1+x_1^2)\partial_1\phi + x_2\partial_2\phi + x_1^2\partial_1^2\phi + 2\alpha x_1^2\partial_1\partial_2\phi + (1+\alpha^2 x_1^2)\partial_2^2\phi$$

kaikilla $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

5.3 *Blackin–Scholesin yhtälö.* Tarkastellaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= -ru + rx\partial_x u + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 \partial_x^2 u, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= (x-K)_+, \end{aligned}$$

missä $r, \beta, K > 0$ ovat vakioita ja merkitään $a_+ = \max(a, 0)$. Näytä Feynmanin–Kacin kaavaa soveltaen, että ylläolevan yhtälön ratkaisu on

$$u(t,x) = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x e^{(r-\frac{1}{2}\beta^2)t + \beta y} - K \right)_+ e^{-y^2/(2t)}\, dy.$$

5.4 *Differentiaalioperaattorin liitto-operaattori.* Määritellään lineaarioperaattori A kaavalla

$$A\phi(x) = a(x)\phi''(x) + b(x)\phi'(x), \quad \phi \in C_0^2(\mathbb{R}),$$

missä $a, b \in C^2(\mathbb{R})$.

(a) Näytä, että $A\phi \in L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $\phi \in C_0^2(\mathbb{R})$.

(b) Merkitään $L^2(\mathbb{R})$:n sisätuloa kaavalla $\langle \phi, \psi \rangle$. Näytä, että $\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A^*\psi \rangle$ kaikilla $\phi \in C_0^2(\mathbb{R})$ ja $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, missä

$$A^*\phi(x) = (a\phi)''(x) - (b\phi)'(x).$$

5.5 *Kolmogorovin etuperoinen yhtälö siirtymätiheyksille.* Olkoon X diffuusio $\mathbb{R}$:ssä, jolle pätee $dX_t = b(x)dt + \sigma(x)dB_t$. Oletetaan, että on olemassa siirtymätiheys $p_t(x,y)$, jolle

$$E^x f(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p_t(x,y)\, dy,$$

missä $y \mapsto p_t(x,y)$ on C^2 ja $t \mapsto p_t(x,y)$ on C^1.

(a) Näytä, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ja $\phi \in C_0^2(\mathbb{R})$ pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\partial_t p_t(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) A^* p_t(x,y)\, dy,$$

missä operaattorin $A = b\partial_x + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_x^2$ liitto-operaattori A^* operoi funktioon $y \mapsto p_t(x,y)$.

(b) Todista, että $\partial_t p_t(x,y) = A^* p_t(x,y)$ kaikilla x, y, t.

Vihje: Dynkinin kaava ja Tehtävä 5.4.